ベーシックレベル数学Ａを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ ベーシックレベル数学Ａの講座へ。この講座は

「数学Ａを，用語の意味や公式のなりたちについて理解するところから学習したい」

という人に適した講座となっています。

数学Ａでは，高校数学の礎(いしずえ)とも言える内容を学習します。この講座では，算数や中学校の数学の学習で得た知識や経験を時に振り返りながら，新たな知識や考え方を，１つ１つ，丁寧に，あなたと一緒に積み重ねていきます。

予習は必要ありません。「講義動画」で，いちから説明します！

テキストの使い方，講座の受講の仕方については，後ほど詳しく説明します。

この講座を受講いただくことで，学校の授業の理解をより深めたり，学校から課された宿題を解きながらそこで問われている内容を確認したり，といったことが可能になります。しかし，この講座で扱う内容は，決して簡単ではありません。だからこそ，あなたがこの講座を通じて数学Ａと本気で向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業しています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで，講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に習った知識を使うことで，その意味がわかる，というのも数学ならではですし，気になって前に戻り改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　場合の数

第１講　場合の数
PART1　集合の要素の個数
PART2　場合の数
PART3　和の法則
PART4　積の法則

第２講　順列
PART1　順列
PART2　順列の利用
PART3　円順列
PART4　重複順列

第３講　組合せ
PART1　組合せ
PART2　組合せの利用
PART3　組分け
PART4　同じものを含む順列

第２章　確率

第４講　事象と確率
PART1　試行と事象
PART2　順列・組合せと確率
PART3　確率の基本性質
PART4　和事象の確率，余事象の確率

第５講　独立な試行の確率，反復試行の確率
PART1　独立な試行の確率
PART2　反復試行の確率

第６講　条件付き確率，期待値
PART1　条件付き確率
PART2　期待値

第３章　図形の性質

第７講　三角形の性質
PART1　線分の内分・外分，角の二等分線と比
PART2　三角形の外心・内心
PART3　三角形の重心
PART4　三角形の線分の比と面積比
PART5　チェバの定理，メネラウスの定理
PART6　三角形の辺と角

第８講　円の性質
PART1　円に内接する四角形
PART2　円と接線
PART3　方べきの定理
PART4　２つの円の位置関係と共通接線
PART5　作図

第９講　空間図形
PART1　直線と平面
PART2　多面体

第４章　数学と人間の活動

第 10 講　約数と倍数
PART1　約数と倍数
PART2　素因数分解と約数
PART3　最大公約数と最小公倍数
PART4　余りによる分類

第 11 講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用
PART1　ユークリッドの互除法
PART2　１次不定方程式
PART3　１次不定方程式とユークリッドの互除法
PART4　整数の性質の活用

講座の受講の仕方

ここでは, 効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い, 実力を伸ばしていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとにいくつかのPART（パート）に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「要点」

⇒　そのPARTで習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ち

「講義問題」（1，2など）

⇒　「要点」で学んだことを確認する問題

「Point Pickup」

⇒　「要点」で学んだことをベースに，知識を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「要点」「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。ある講に含まれるPARTの一部または全部が未習，または理解が不十分の状態で講義を受講いただいても，まったく問題ありません。また，予習は必要ありません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら, テキストと筆記用具を手元におき, 動画を再生してください。そして, 真剣に受講して, 講師がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，複数のチャプターに分かれています。

（例）　第１講　場合の数

PART1　集合の要素の個数　…　【要点整理①】・【要点整理②】・【要点整理③】・【問題解説】

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　【要点整理】のチャプターで，「要点」の内容を解説します。このPARTで習得すべき用語や知識，公式およびその成り立ちを解説します。

必要なことは予めテキストに記載してあります。その上で，一部「穴埋め」や「記述」が必要な部分があります。講師の話に全力で耳を傾け，テキストを完成させましょう。

⑵　【問題解説】のチャプターで，①，②，③，④といった「講義問題」を解説します。

まずは，「Point Pickup」にて，「要点」を通じて習得したことを整理します。【要点整理】と同様，一部「穴埋め」や「記述」となっています。

次に，「Point Pickup」で整理した知識や考え方を元に，実際に問題を解いていきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一次停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉の一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

さらに，解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照して，どこに止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「要点」→「Point Pickup」→「講義問題」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分の受講時間となります。

各講に含まれるすべての PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は,PART 単位の受講でも構いません。また,週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

・「新しい知識や考え方を知って，思考の幅を広げる」

・「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」

・「問題が解けるようになることがゴールではなく，前提となる知識・考え方を学ぶ」

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，数学が苦手な人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれませんが,安心してください。この講座は,いつでも画面を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味を持つのかを考えること，必要なら戻って何度も聞くこと。焦る必要はありません。そして,講座の受講を進めていくうちに,感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう１つ大切なこと，それは

・「やっぱり自分はできないんだ……」は厳禁！

だということです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気付いていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この PART から何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずは【問題解説】の動画を，それでも思い出せない場合は【要点整理】の動画を見直してみましょう。記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学んだことを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその講の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに**「確認問題」**を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだ知識・考え方を確認することができる問題セットとなっていますので，この PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

解き終えたら，「別冊解答」を見て，解き方をチェックしてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，使う練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まり，数学Ａの世界観が少しずつ見えてくるようになってきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 15 分～ 30 分。それを，どこの曜日のどの時間帯に何 PART（何講）受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。学校で授業を受ける時間と同じように，時と場所を変えて『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ａと本気で向きあう時間，これを確保してください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気付き，それが「自信」につながります。

この「ベーシックレベル数学Ａ」は，あくまで数学Ａの「入門講座」です。入門は，簡単という意味ではなく，その先に進むために欠かすことのできない「作法」を身に付ける，ということです。受講後は，**「高１・高２ スタンダードレベル数学Ａ」**に進んでみてください。自分の知識がどのように活用できるのか，それを知れば，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に広がる数学Ａの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

[MEMO]

第1講　場合の数

PART1　集合の要素の個数

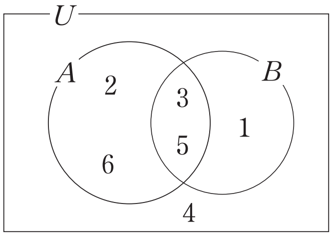
要点① 和集合の要素の個数

要素の個数が有限個である集合を「　　　　　」，要素の個数が有限個ではない集合を「　　　　　」という。集合 A が有限集合のとき，A の要素の個数を「　　　」で表す。

例　$A=\{3,\ 4\}$ のとき，$n(A)=$

空集合 $\varnothing$ は，要素を1つももたない集合であるから，$n(\varnothing)=$　である。

全体集合を $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，$U$ の部分集合 A，B を $A=\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}$，$B=\{1,\ 3,\ 5\}$ とすると



$n(A)=\quad,\ n(B)=$

また，和集合 $A\cup B$，共通部分 $A\cap B$ について

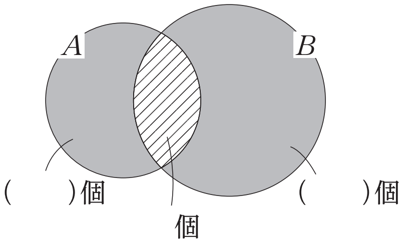
$A\cup B=\{\qquad\qquad\}$，$A\cap B=\{\quad\}$

であるから

$n(A\cup B)=\quad,\ n(A\cap B)=$

である。

全体集合 U の部分集合 A，B について，$n(A)=a$，$n(B)=b$，$n(A\cap B)=c$ とすると，右図より



$n(A\cup B)=n(\qquad)+n(\qquad)+n(\qquad)$

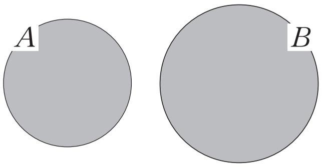
$=\qquad+\quad+$

$=a+b-c$

$=n(\quad)+n(\quad)-n(\qquad)$

が成り立つ。

特に，$A\cap B=\varnothing$ のときは



$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

が成り立つ。

和集合の要素の個数

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$A\cap B=\varnothing$ のとき　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

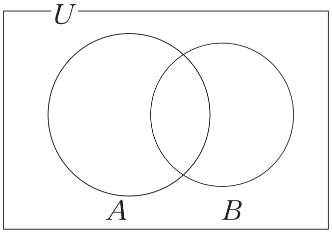
例　全体集合 U の部分集合 A, B について

$n(U)=6$, $n(A)=4$, $n(B)=3$, $n(A\cap B)=2$

であるとき

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=\quad+\quad-\quad=5$



要点② 倍数の個数

1から100までの整数のうち，3の倍数全体の集合を A とすると

$A=\{3,\ 6,\ 9,\ \cdots\cdots,\quad\}$

$=\{3\cdot1,\ 3\cdot2,\ 3\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 3\cdot\quad\}$

であるから，1から100までの整数のうち，3の倍数の個数は

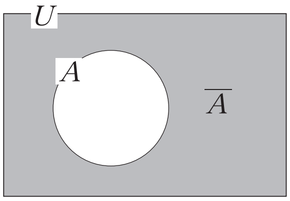
$n(A)=$　（個）

である。

一般に，1から n までの整数のうち，k の倍数の個数は，n を k で割った　　である。

要点③ 補集合の要素の個数

全体集合 U の部分集合を A とすると，A の補集合 $\overline{A}$ は，全体集合 U の要素で A に属さない要素全体の集合であるから，次の等式が成り立つ。



補集合の要素の個数

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

例　1から100までの整数のうち，8の倍数でない数の個数を求める。

1から100までの整数全体の集合を U, U の部分集合で8の倍数全体の集合を A とすると

$A=\{8\cdot1,\ 8\cdot2,\ 8\cdot3,\ \cdots\cdots,\ 8\cdot\quad\}$

8の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ であるから，求める個数は

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

$=100-\quad=\quad$（個）

1 1 から 100 までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1) 5 の倍数

(2) 5 の倍数でない数

(3) 5 の倍数かつ 7 の倍数

(4) 5 の倍数または 7 の倍数

(5) 5 の倍数であるが，7 の倍数でない数

Point Pickup

和集合，補集合の要素の個数

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$A\cap B=\varnothing$ のとき　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)$

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$

倍数の個数

1 から n までの整数のうち，k の倍数の個数は，n を k で割った商

第 1 講 PART1 確認問題

100 以下の自然数のうち，次のような数の個数を求めよ。

1 4 の倍数 [アイ] 個

2 4 の倍数でない数 [ウエ] 個

3 4 の倍数 かつ 9 の倍数 [オ] 個

4 4 の倍数 または 9 の倍数 [カキ] 個

5 4 の倍数であるが，9 の倍数でない数

[クケ] 個

PART2 場合の数

要点① 樹形図

a，a，b，b，c の 5 文字から 2 文字選んで並べる方法は何通りあるかを考える。
起こりうるすべての場合を列挙すると次のようになる。

よって，　通りある。

起こりうるすべての場合の数を数えるときは，「　　　　　　」「　　　　　　」数え上げる必要がある。列挙する場合には，「アルファベット順」等，何らかの規則を決めるとよい。

起こりうる場合を枝分かれした図で表したものを「　　　　　」という。樹形図は，もれなく重複なく数え上げるのに便利な図である。
a，a，b，b，c の 5 文字から 2 文字選んで並べる方法を，樹形図で表すと，以下となる。

今回の樹形図においては，まず最初にくる文字を「　　　」し，そのそれぞれにおいて，次の文字にどんな「　　　」があるかを表したものである。最初の文字によって，次にくることができる文字の「　　　　　　　　」していることに注意。

[MEMO]

2 (1) 大中小3つのさいころを同時に投げたとき，目の和が6になる場合は何通りあるか。

(2) A，Bの2人がじゃんけんをし，どちらかが3回勝つまでじゃんけんを続けるとする。1回目にAが勝つとき，勝敗のパターンは何通りあるか。

Point Pickup

もれなく，重複なく数え上げる

起こりうるすべての場合の数をもれなく，重複なく数え上げるためには，大小の順，アルファベット順のように，何らかの規則を決めて表すとよい。また，「　　　　　」の利用も効果的である。

あることがらを，○や×などの記号やアルファベットなど，別のもので置き換えるとよい場合もある。

第1講　PART2 確認問題

1　赤，白，黒の3種類の玉から合計5個を取り出す。
どの色の玉も1個以上取り出すとすると，3種類の玉の異なる取り出し方は全部で [ア] 通りある。

2　コインを何回か投げるとき，表が合計3回出るか，裏が合計2回出たところで投げることをやめる。
このとき，表，裏の異なる出方は，全部で
[イウ] 通りある。

PART3 和の法則

要点 ① 和の法則

a, b, c, c の 4 文字から 2 文字を選んで並べる方法を樹形図で表すと，以下となる。

①　　　　　②　　　　　③

a　　　　　b　　　　　c

①，②，③は「　　　　」がそれぞれ a，b，c の場合であり

①は　通り，②は　通り，③は　通り

である。①，②，③の 3 つで　　　　　である。

また，①，②，③はどれも　　　　　。

よって，a，b，c，c の 4 文字から 2 文字選んで並べる場合の数は

2　2　3＝　(通り)

と求めることができる。

一般に，次のことが成り立つ。

和の法則

2 つの事柄 A と B は同時には起こらないとする。

A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通り

であるとき，A または B が起こる場合の数は $a+b$ 通りである。

和の法則は，3 つ以上の事柄についても同様に成り立つ。

[MEMO]

3 大小2つのさいころを投げるとき，目の和が次のようになる場合の数を求めよ。

(1) 4または5

(2) 4の倍数

Point Pickup

和の法則

ある事柄が「　　　　　　　　　　　　」2つの事柄A，Bに分けられるとき

A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通り

であるならば，ある事柄が起こる場合の数は $a+b$ 通りである。

3つ以上の事柄に分けられるときも同様。

第 1 講　PART3 確認問題

1　大小 2 個のさいころを投げたとき，出た目の和が 3 または 6 になるのは，全部で [ア] 通りある。

2　大小 2 個のさいころを投げるとき，出た目の和が 10 以上になるのは，全部で [イ] 通りある。

PART4　積の法則

要点①　積の法則

a，b，c，d の4文字から2文字を選んで並べる方法を樹形図で表すと，以下となる。

①　②　③　④

a　b　c　d

①，②，③，④は「　　」がそれぞれ a，b，c，d の場合であり

①は　通り，②は　通り，③は　通り，④は　通り

であり，①，②，③，④の4つですべての場合である。

また，①，②，③，④はどれも同時には起こらない。

よって，a，b，c，d の4文字から2文字選んで並べる場合の数は，和の法則により，

$3+3+3+3=12$（通り）

である。

ここで，1文字目が a，b，c，d の4通りの　　も，2文字目は　　3通りであることから，4　　$=12$（通り）と求めることができる。

一般に，次のことが成り立つ。

積の法則

事柄Aの起こり方が a 通りあり，そのどの場合においても，事柄Bの起こり方が b 通りであるとき，AとBがともに起こる場合の数は $a\times b$ 通りである。

積の法則は，3つ以上の事柄についても同様に成り立つ。

[MEMO]

4 (1) 1個のさいころを2回投げたとき，1回目に偶数の目，2回目に奇数の目が出る場合は何通りあるか。

(2) 2種類の前菜，4種類のメインディッシュ，3種類のデザートからそれぞれ1種類ずつ選ぶとき，選び方は何通りあるか。

Point Pickup

積の法則

事柄Aの起こり方が a 通りあり，その「　　　　　　　　　　　　」，事柄Bの起こり方が b 通りであるとき，AとBがともに起こる場合の数は $a \times b$ 通りである。

3つ以上の事柄についても，同様のことが成り立つ。

和の法則と積の法則

ある事柄の起こる場合の数を求めるとき，和の法則により，同時には起こらない複数の事柄に分け，そのそれぞれにおける場合の数を求め，それらの和をとることで求めることができる。

分けた事柄それぞれにおける場合の数が「　　　　　　　　　　」場合は，積の法則により求めることができる。

第 1 講　PART4 確認問題

1　1個のさいころを2回投げたとき，1回目に奇数の目が，2回目に5以上の目が出る場合は，全部で [ア] 通りある。

2　A組3人，B組4人，C組5人の合計12人の生徒がいる。各組から1人ずつ選ぶとき，選び方は全部で [イウ] 通りある。

第 2 講　順列

PART1　順列

要点①　順列

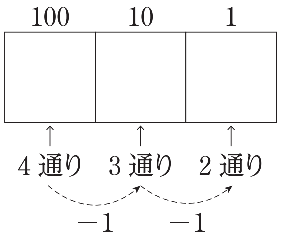
「順列」… いくつかのものを，順序をつけて1列に並べたもの。

4個の数字1，2，3，4から異なる3個を選んで，3桁の数を作る順列の総数を考える。
100の位から順に決めていくと

① 100の位の数は1，2，3，4の4通り

② 10の位の数は，①で選んだ数以外の3通り

③ 1の位の数は，①，②で選んだ数以外の2通り



である。よって，積の法則により

4　3　2＝24（通り）

である。

一般に，異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列を，

「　　　　　　　　　　　　　　」

といい，その総数を「　　　」で表す。ただし，$r \leqq n$ である。

4個から3個を取る順列の総数は　　　と表され，上の例より

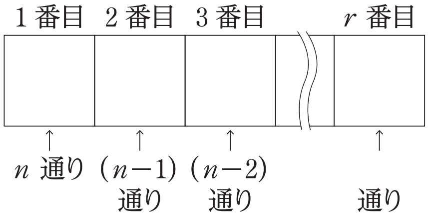
　　　＝　　　　＝24

である。

n 個から r 個取る順列の総数は，右図より

$_n\mathrm{P}_r = n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\cdots\times$

と表される。



順列の総数 $_n\mathrm{P}_r$

$$_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}_{r\text{個}} \qquad (r \leqq n)$$

例　6人から3人を選んで1列に並べる順列の総数は

　　　＝　　　　＝120（通り）

要点② 階乗

異なる n 個のものをすべて並べる順列は，

$_{n}\mathrm{P}\quad = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$

である。①の右辺は，1 から n までのすべての自然数の積である。これを n の「　　　」といい，記号「　　」で表す。

階乗 $n!$

$n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1$

例　4 人全員を 1 列に並べる順列の総数は

$\qquad = \qquad = 24$（通り）

$0 < r < n$ のとき，$_{n}\mathrm{P}_{r}$ を階乗の記号を用いて表す。

$_{n}\mathrm{P}_{r} = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

$=$

よって　$_{n}\mathrm{P}_{r} = \dfrac{n!}{(n-r)!}$　$\cdots\cdots②$

②において，$r = n$ のとき　$_{n}\mathrm{P}\quad = \dfrac{n!}{(n-\quad)!} = \dfrac{n!}{\quad}$ となる。

$_{n}\mathrm{P}_{n} = n!$ であるから，②が $r = n$ のときにも成り立つように，$0! = 1$ と定める。

また，②において，$r = 0$ のとき　$_{n}\mathrm{P}\quad = \dfrac{n!}{(n-\quad)!} = \dfrac{n!}{\quad} = 1$ となる。

よって，②が $r = 0$ のときにも成り立つように，$_{n}\mathrm{P}_{0} = 1$ と定める。

1 (1) 次の値を求めよ。

(i) ${}_4\mathrm{P}_3$　　(ii) ${}_7\mathrm{P}_1$　　(iii) $3!$　　(iv) $5!$

(2) 次のものの総数を求めよ。

(i) 5 人の生徒から 2 人を選んで 1 列に並べるときの並べ方。

(ii) NUMBERS という単語の 7 個の文字を全部使ってできる文字列。

Point Pickup

順列の総数

「　　　　　」n 個のものがあるとき

・その中から「　　　　　」r 個のものを取り出して 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1) \qquad (r \leqq n)$$

・n 個のものすべてを 1 列に並べる順列の総数は

$${}_n\mathrm{P}_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ である。また，${}_n\mathrm{P}_0 = 1$，$0! = 1$ と定める。

第 2 講　PART1 確認問題

1　${}_6\mathrm{P}_2 =$ [アイ]

2　${}_8\mathrm{P}_1 =$ [ウ]

3　$4! =$ [エオ]

4　$6! =$ [カキク]

5　5 人の生徒の中から 3 人を選んで 1 列に並ぶとき，並び方の総数は，[ケ] P [コ] ＝ [サシ] (通り) である。

6　A，B，C，D，E の 5 文字を並べ替えてできる文字列は，全部で [ス] ! ＝ [セソタ] (通り) ある。

PART2 順列の利用

要点① 順列により役割をもたせる

10 人の委員の中から委員長，副委員長，書記を 1 人ずつ選ぶ方法は何通りあるかを求める。

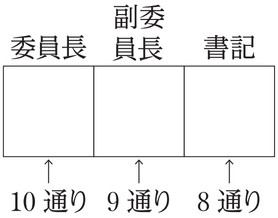
- 委員長の決め方は 10 通り
- 副委員長の決め方は，委員長に選んだ人を除く 9 通り
- 書記の決め方は，委員長，副委員長に選んだ人を除く 8 通り

である。よって，積の法則により，求める選び方の総数は

$10\times9\times8=720$（通り）

である。

ここで，$10\times9\times8=$ 　　　であることから，10 人の委員の中から委員長，副委員長，書記を 1 人ずつ選ぶ選び方の総数は，10 人の中から 3 人選んで 1 列に並べる「　　　　」の総数に等しい。



要点② ある部分に条件がある順列

1，2，3，4，5 の 5 個の数字から，異なる 3 個の数字を選んで，3 桁の整数を作るとき，偶数は何個作ることができるかを求める。

ある整数が偶数であるとき，その「　　の位」は偶数である。

よって，一の位は 2，4 の　通りである。

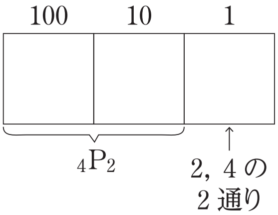
そのいずれの場合についても，百，十の位の選び方は，

残り　個の数字から　個取って 1 列に並べる順列の総数に等しく，

　　通りである。

よって，求める個数は，積の法則により

　　　　$=$ 　　　$=$ 　（個）



要点 ③ 隣り合うものが条件にある順列

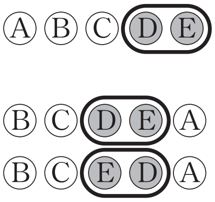
男子A，B，C，女子D，Eが1列に並ぶとき，女子が隣り合うような並び方は何通りあるか求める。

隣り合う女子2人を「　　　　　　」と，並び方の総数は　人が並ぶ順列に等しく，　通りである。

そのいずれの場合についても，女子2人の並び方は　通り。

よって，求める並び方の総数は，積の法則により

　　＝　　＝　（通り）



2 (1) 1から7までの数字が1つずつ書かれた7枚のカードのうち，3枚を選んでA，B，Cの3人に1枚ずつ配るとき，配り方の総数は何通りあるか。

(2) 5個の数字1，2，3，4，5の中から異なる4個を使ってできる4桁の奇数は何個あるか。

(3) 男子3人，女子2人が1列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(i) 両端が女子である　　(ii) 男子3人が隣り合う

Point Pickup

順列により役割を持たせる

5人の生徒から2人選んで1列に並べることは，5人から2人選び，その2人に1，2，…という番号を順に与えることと同じである。
つまり，選んだものに対して「それぞれ異なる役割を付与する」場合の数を求めるには，「順列」の総数を求めればよい。

条件がある順列

・ある特定の場所に条件がある場合の順列は，その場所の条件から先に処理をするとよい。
・隣り合うものが条件にある場合は，隣り合うものを1組のものとして扱った上で，全体の順列を考え，次に隣り合うもの同士の順列を考えるとよい。

第 2 講　PART2 確認問題

1　a，b，c，d，e の文字が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードのうち，3 枚を選んで 3 人の生徒に 1 枚ずつ配るとき，配り方は全部で **アイ** 通りある。

2　6 個の数字 1，2，3，4，5，6 の中から異なる 3 個を使ってできる 3 桁の奇数は，全部で **ウエ** 個ある。

3　大人 3 人と子ども 4 人が 1 列に並ぶとき，両端が大人であるような並び方は **オカキ** 通りある。

4　大人 4 人と子ども 3 人が 1 列に並ぶとき，子ども 3 人が隣り合うような並び方は **クケコ** 通りある。

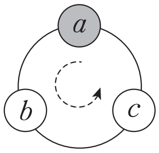
PART3 円順列

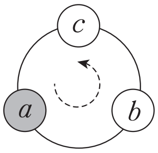
要点 ① 円順列

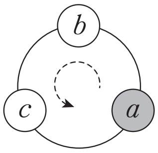
「円順列」… いくつかのものを「　　　」に並べる順列。

円順列では，回転すると一致する並び方は同じ並び方，と考える。

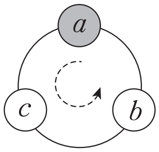
例えば，3 個の文字 a，b，c を円形に並べるとき，以下の①，②，③は，円順列としては同じ並び方であり，a に注目し，a から反時計回りに文字を追っていくと，すべて abc である。

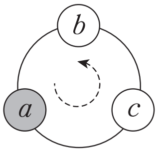
①


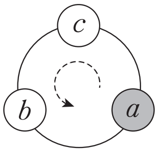
②


③


また，反時計回りに文字を追うと acb となる円順列は，以下の④，⑤，⑥のように 3 通りできる。

④


⑤


⑥


3 個の文字 a，b，c の順列は，$3!$ 通りある。そのいずれの場合も，回転すると一致するものが　通りずつできる。よって，3 個の文字 a，b，c の円順列の総数は

$$3! \quad = \frac{3!}{\quad} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{3} = 2\cdot 1 = 2 \text{（通り）}$$

である。

また，①～③，④～⑥のそれぞれの代表として①と④に注目すると，この 2 つの違いは b と c の並び順，すなわち　　　　　　　　　である。つまり，文字 a の場所を　　　し，残りの 2 つの文字 b，c の順列を考えることで，円順列の総数を求めることができ，その総数は

$$\quad = 2 \text{（通り）}$$

である。

一般に，次のことがいえる。

円順列の総数

異なる n 個のものの円順列の総数は　$\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

例　4人が輪の形に並ぶとき，並び方の総数は

$$=\qquad=\qquad=6\ (\text{通り})$$

円順列において，裏返すと一致する並び方を同じ並び方とするとき，その順列を「じゅず順列」という。円順列には，裏返すと一致するものが2つずつあるから，異なる n 個のもののじゅず順列の総数は

$$\frac{(n-1)!}{2}\ \text{通り}$$

である。

3 (1) A, B, C, D, Eの5人が円形に並ぶとき，次のものを求めよ。

(i) 並び方の総数　　(ii) AとBが隣り合う並び方の総数

(2) 異なる6個の玉をつなげて首飾りを作るとき，何種類の首飾りができるか。

Point Pickup

円順列・じゅず順列

異なる n 個のものの円順列の総数は $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$

円順列の考え方は，以下の2つ

・順列の総数を，重複度合いで割る。

・あるものを固定し，残ったものの順列の総数を考える。

異なる n 個のもののじゅず順列(円順列において，裏返すと一致するものを同じものとみなす順列)の総数は $\dfrac{(n-1)!}{2}$

第 2 講　PART3 確認問題

1　6 人が手をつないで 1 個の輪をつくるとき，並び方は全部で［アイウ］通りある。

2　a，b，c，d，e，f の 6 人が円形に並ぶとき，a と b が隣り合うような並び方は全部で［エオ］通りある。

3　異なる色の玉 8 個をひもでつなげて首飾りを作るとき，並べ方の異なるものは全部で［カキクケ］通りある。
ただし，裏返すと同じ並び方になるものは同じものとみなす。

PART4 重複順列

要点① 重複順列

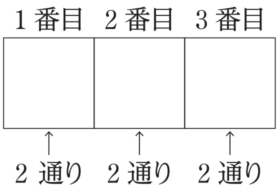
同じものを繰り返し使ってもよい(重複を許す)ときの順列を考える。

a，b の2文字から，重複を許して3個並べるときの順列について

1番目の選び方は，a，b の2通り

2番目の選び方は，a，b の2通り

3番目の選び方は，a，b の2通り



よって，並べ方の総数は，積の法則により $2\times2\times2=8$ (通り)

一般に，異なる n 個のものから，重複を許して r 個取り出して並べる順列を

n 個から r 個取る「　　　　　　　」

という。重複を許すため，同じ数を繰り返しかけることになるため，「　　　」で表すことができる。上の例は，2個から3個取る重複順列であるから，$2\times2\times2=2$　と表すことができる。

一般に，次のことがいえる。

重複順列の総数

異なる n 個のものから，重複を許して r 個取り出して並べる重複順列の総数は

n^r

例 4人の生徒がじゃんけんをするとき，手の出し方は何通りあるか求める。

4人の生徒それぞれについて，グー，チョキ，パーの3通りの手の出し方がある。

よって　　＝　　(通り)

※異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列においては $r\leqq n$ であるが，異なる n 個のものから重複を許して r 個取り出して並べる重複順列においては $r\leqq n$ とは限らず，$r>n$ となる場合もある。

【MEMO】

4 (1) 5問の問題の解答を○か×で答えるとき，○，×の答え方は何通りあるか。

(2) 0，1，2，3の4個の数字を，重複を許して使って整数を作るとき，次のような整数は何個できるか。

(i) 4桁の整数　　(ii) 4桁の偶数

Point Pickup

重複順列

異なる n 個のものから，重複を許して r 個取り出して並べる重複順列の総数は

$$\underbrace{n\times n\times\cdots\cdots\times n}_{r\text{個}}=n^r$$

第 2 講 PART4 確認問題

1 4 問のクイズを○か×かで答えるとき，この 4 問の答え方は全部で **アイ** 通りある。

2 0，1，2，3，4 の 5 個の数から重複を許して 3 個選んで 3 桁の整数をつくる。

このような整数は，全部で **ウエオ** 個できる。

3 2，3，4 の 3 個の数から重複を許して 4 個選んで 4 桁の整数をつくる。

このうち，偶数は全部で **カキ** 個できる。

第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

要点 ①　組合せ

「組合せ」… いくつかのものを，取り出す順序や並べる順序を区別せずに，取り出したものを1組にしたもの。

4個の数字1，2，3，4から異なる3個を選ぶ組合せは

{ , , }, { , , }, { , , }, { , , }

の4通りである。

このように，異なる n 個のものから異なる r 個を取り出す組合せを

「　　　　　　　　　　」

といい，その総数を「　　」で表す。ただし，$r \leqq n$ である。

4個から3個を取る組合せの総数は　　と表され，上の例より

　　＝4（通り）

である。

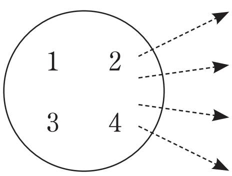
この組合せを，順列の総数を用いて求める。

4個の数字1，2，3，4から異なる3個を選んで1列に並べる順列の総数は

　　通り

である。4個の数字1，2，3，4から異なる3個を選ぶ組合せは　　通りであり，この $_4C_3$ 通りの組それぞれについて，選んだ異なる3個の数字を1列に並べる順列は　通りである。

＜集合＞　＜組合せ＞　＜順列＞



{1，2，3} → 123，132，213，231，312，321

{1，2，4} → 124，142，214，241，412，421

{1，3，4} → 134，143，314，341，413，431

{2，3，4} → 234，243，324，342，423，432

よって，4個の数字1，2，3，4から異なる3個を選んで1列に並べる順列の総数は

　　通り

である。

以上より，次の等式が成り立つ。

$${}_{4}\mathrm{C}_{3}\times 3! = {}_{4}\mathrm{P}_{3}$$

この式を変形すると

$${}_{4}\mathrm{C}_{3} = \frac{{}_{4}\mathrm{P}_{3}}{3!}$$

となり，$\frac{{}_{4}\mathrm{P}_{3}}{3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{3\cdot 2\cdot 1} = 4$ と計算することができる。

同様に，n 個から r 個取って 1 列に並べる順列について，${}_{n}\mathrm{C}\quad\times\quad ! = {}_{n}\mathrm{P}$　が成り立つから

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!}$$

と表すことができ，${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ は ${}_{n}\mathrm{P}_{r}$ を$r!$，すなわち「　　　　　　　　　　　　　　」と考えることができる。

組合せの総数 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}^{r\text{ 個}}}{\underbrace{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1}_{r\text{ 個}}} \qquad (r \leqq n)$$

例　6 人から 3 人を選ぶ組合せの総数は

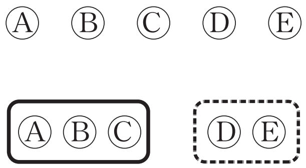
$$\qquad = \frac{\quad}{\quad} = 20\ （通り）$$

${}_{n}\mathrm{P}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$ であることを用いると，${}_{n}\mathrm{C}_{r} = \frac{{}_{n}\mathrm{P}_{r}}{r!} =$ 　　　　　　と表される。

ただし，${}_{n}\mathrm{C}_{0} = 1$ と定める。

要点 ②　${}_{n}\mathrm{C}_{r}$ の性質

5 人から 3 人選ぶ組合せによって組を決めることは，選ばない 2 人を組合せによって決めるのと同じである。



よって ${}_{5}\mathrm{C}_{3}$ 　${}_{5}\mathrm{C}_{2}$ が成り立つ。

一般に，次の等式が成り立つ。

$${}_{n}\mathrm{C}_{r} = {}_{n}\mathrm{C}_{n-r}$$

1 (1) 次の値を求めよ。

(i) ${}_8\mathrm{C}_3$　　(ii) ${}_6\mathrm{C}_4$　　(iii) ${}_5\mathrm{C}_1$

(2) 次のものの総数を求めよ。

(i) 10 人の生徒から 4 人を選ぶときの選び方。

(ii) 正六角形の 6 個の頂点のうち，3 点を結んでできる三角形の個数。

Point Pickup

組合せの総数

異なる n 個のものから異なる r 個のものを取り出す組合せの総数は

$${}_n\mathrm{C}_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1}\qquad(r\leqq n)$$

${}_n\mathrm{C}_r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ である。また，${}_n\mathrm{C}_0=1$ と定める。

${}_n\mathrm{C}_r$ の性質

異なる n 個のものから異なる r 個を取り出すことは，取り出さない $(n-r)$ 個を選ぶことと同じである。よって

$${}_n\mathrm{C}_r={}_n\mathrm{C}_{n-r}$$

が成り立つ。r が n の半分より大きいときに有効である。

第3講 PART1 確認問題

1 $_7C_3 =$ [アイ]

2 $_8C_6 =$ [ウエ]

3 $_{10}C_1 =$ [オカ]

4 6人の生徒の中から2人を選ぶとき，選び方の総数は，

[キ] C [ク] ＝ [ケコ] (通り)である。

5 正五角形 ABCDE の5個の頂点から3個を選んで結び，三角形を作る。このような三角形は全部で [サシ] 個ある。

PART2 組合せの利用

要点① 複数の集団から選ぶ

男子5人，女子4人の合計9人から3人選ぶとき，その選び方は

=　　　=84（通り）　である。

これは，選ぶ3人を「男子，女子に関係なく」選ぶ場合である。

男子5人から2人，女子4人から1人を選んで，合計3人の組を作るときの組の作り方の総数は

・男子5人から2人選ぶ方法は　　通り

・男子の選び方のおのおのに対して，女子4人から1人選ぶ方法は　　通り

よって，求める場合の数は，積の法則により　　　　=　　　=40（通り）　である。

これは，男子の集団，女子の集団から「それぞれ何人選ぶかが指定されている」場合である。

このように，「どの集団からいくつ選ぶか」が明確になっていれば，それぞれの集団における組合せを考え，積の法則により場合の数を求めることができる。

要点② 場合分け，補集合の利用

男子5人，女子4人の合計9人から3人選ぶとき，女子が少なくとも1人選ばれるような選び方の総数を求める。

9人から3人選ぶときの男子，女子の選び方は以下の場合に分けられる。

① 男子3人

② 男子2人，女子1人

③ 男子1人，女子2人

④ 女子3人

このうち，女子が少なくとも1人選ばれるのは，　，　，　の場合である。

②の場合の選び方は　　　　=10×4=40（通り）

③の場合の選び方は　　　　=5×6=30（通り）

④の場合の選び方は　　=　　=4（通り）

②，③，④は「　　　　　　　　」ので，求める場合の数は，「　　　　　」により

40　30　4＝74（通り）

である。

9人から3人選ぶ場合は，①～④ですべてであり，このうち，「女子が少なくとも1人選ばれる」場合が「　　　　　　　　　」のは，①の場合のみである。

よって，9人から3人選ぶすべての場合から，①の場合を「　　　」ことで，女子が少なくとも1人選ばれる場合の数を求めることができる。

9人から3人選ぶ選び方は　　＝84（通り）

①の場合の選び方は　　＝　　＝10（通り）

よって，求める場合の数は

84　10＝74（通り）

である。

2 男子７人，女子５人の中から３人を選ぶとき，次のような選び方はそれぞれ何通りあるか。

(1) 男女問わず３人選ぶ。

(2) 男子１人，女子２人を選ぶ。

(3) 男子が少なくとも１人含まれるように選ぶ。

Point Pickup

複数の集団から選ぶ

どの集団からいくつ選ぶかを明確にし，それぞれの集団における組合せを考え，
「　　　　　　」により場合の数を求める。

場合分け，補集合の利用

人数や種類などに注目して，題意を満たす場合を「場合分け」し，それぞれの場合の数を計算する。それぞれの場合が同時には起こらないときは，「　　　　　　」により，場合の数を求めることができる。

また，「求める場合が起こらない」場合とその場合の数を求めることができれば，

(全体の総数)－(起こらない場合の総数)

のように「　　　　　」で求めることができる。

第 3 講 PART2 確認問題

男子 6 人，女子 4 人の中から 3 人を選ぶとき，次のような選び方はそれぞれ何通りあるか。

1 男女を問わず 3 人を選ぶ。

[アイウ] 通り

2 男子 2 人，女子 1 人を選ぶ。

[エオ] 通り

3 女子が少なくとも 1 人含まれるように選ぶ。

[カキク] 通り

PART3 組分け

要点① 組合せを利用する組分け

6人の生徒をA，B，Cの3つの組に2人ずつ分ける場合の数を求める。

A に入る2人を選ぶ方法は　　通り

B に入る2人を，残り　人から選ぶ方法は　　通り

C に入る2人は，残った2人である。

よって，分け方の総数は，積の法則より

$$\quad = \quad = 90$$ (通り) ……①

6人の生徒を3つの組に2人ずつ分ける場合の数は，①の結果とは異なる。

6人の生徒を a，b，c，d，e，f としたとき，3つの組の2人ずつの組分けの例として

$\{a,\ b\}$，$\{c,\ d\}$，$\{e,\ f\}$

がある。この3つの組にA，B，Cの名前をつける方法は「　　」を用いると　通りある。これは，他の組分けの場合も同様である。

$\{a,\ b\}$	$\{c,\ d\}$	$\{e,\ f\}$
A	B	C
A	C	B
B	A	C
B	C	A
C	A	B
C	B	A

よって，①の90通りには，A，B，Cの区別をなくすと同じ分け方になるものが　通りずつ存在する。

よって，6人の生徒を3つの組に2人ずつ分ける分け方の総数は

$$\frac{90}{\quad} = 15$$ (通り)

である。これは，${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{{}_n\mathrm{P}_r}{\quad}$ と同様，「　　　　」と考えることができる。

【MEMO】

3 異なる9個の玉を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) A，B，Cの3人に3個ずつ分ける。

(2) 3個ずつ3つの組に分ける。

(3) 2個，2個，2個，3個の4つの組に分ける。

Point Pickup

組合せを利用する組分け

分けるものがすべて区別でき，かつ各組に振り分ける個数が明確な場合は，組合せを用いて組分けを行うことができる。

振り分ける個数が同じ，かつ組に名前がなく，区別できない組が n 組ある場合は，名前をつけて組を区別して組分けを行い，その結果を「　　　　　　」とよい。

第3講 PART3 確認問題

異なる6個の玉を3つの袋に分けて入れるとき，次の場合は何通りあるか。

1 袋をA，B，Cと区別し，それぞれ2個ずつ入れる。

[アイ] 通り

2 袋を区別せずに，それぞれに2個ずつ入れる。

[ウエ] 通り

3 3つの袋に1個，2個，3個ずつ入れる。

[オカ] 通り

PART4 同じものを含む順列

要点① 同じものを含む順列

a，a，b の3個の文字の順列を考える。

2つの a を区別するために，a_1，a_2 とすると，

a_1，a_2，b の3個の文字の順列は $3!$ 通りある。

このうち，a_1，a_2 の区別をなくすと同じ順列

になるものが　　通りずつある。

よって，順列の総数は

$$\frac{3!}{}=\frac{3\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=3\ (\text{通り})$$

である。

$$\left.\begin{matrix}a_1a_2b\\a_2a_1b\end{matrix}\right\}aab \qquad \left.\begin{matrix}a_1ba_2\\a_2ba_1\end{matrix}\right\}aba \qquad \left.\begin{matrix}ba_1a_2\\ba_2a_1\end{matrix}\right\}baa$$

同様に，a，a，a，b，b，c の6個の順列において，a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c として同じ文字をすべて区別すると，この6文字の順列は $6!$ 通りある。

このうち，3つの a の区別をなくすと同じ順列になるものが　　通り，そのおのおのに対して，2つの b の区別をなくすと同じ順列になるものが　　通りある。

よって，順列の総数は

$$\frac{6!}{}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}=60\ (\text{通り})$$

である。

$$\left.\begin{matrix}\left.\begin{matrix}a_1a_2a_3b_1b_2c\\a_1a_3a_2b_1b_2c\\a_2a_1a_3b_1b_2c\\a_2a_3a_1b_1b_2c\\a_3a_1a_2b_1b_2c\\a_3a_2a_1b_1b_2c\end{matrix}\right\}aaab_1b_2c\\ \left.\begin{matrix}a_1a_2a_3b_2b_1c\\\vdots\\a_3a_2a_1b_2b_1c\end{matrix}\right\}aaab_2b_1c\end{matrix}\right\}aaabbc$$

一般に，次のことがいえる。

同じものを含む順列の総数

n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，

これら n 個のものをすべて1列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}\qquad \text{ただし } p+q+r+\cdots\cdots=n$$

例　HOKKAIDO の８文字を１列に並べるとき，並べ方の総数を求める。

Ｏが２個，Ｋが２個，Ｈ，Ａ，Ｉ，Ｄが１個の合計８個の文字の順列であるから

$$\underline{\qquad\qquad\qquad}=\underline{\qquad}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1}=10080\ (\text{通り})$$

a，a，a，b，b，c の６個の順列は，次のように組合せの考え方を用いて求めることができる。

・右のように，①～⑥の６個の場所を用意する。

①	②	③	④	⑤	⑥

・３つの a を入れる場所を選ぶ方法は $\underline{\qquad}$ 通り

・残りの３個の場所から，２つの b を入れる場所を選ぶ方法は $\underline{\qquad}$ 通り

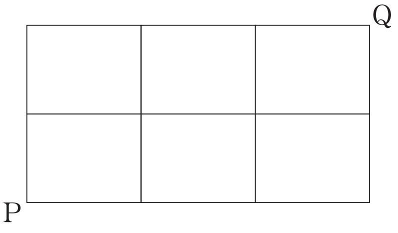
・c は残りの１個の場所に入る

よって，順列の総数は

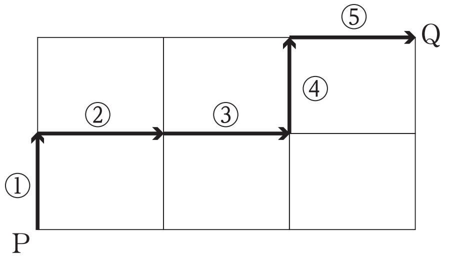
$${}_6C_3\times{}_3C_2=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\frac{3\cdot2}{2\cdot1}=60\ (\text{通り})$$

要点②　最短経路の総数

右の図のような道がある。ＰからＱまで行く最短経路は何通りあるか求める。



右に１区画行くことを→，上に１区画行くことを↑で表すとすると，ＰからＱまで行く最短経路の道順の総数は，→３個，↑２個の順列の総数に等しい。



⇔

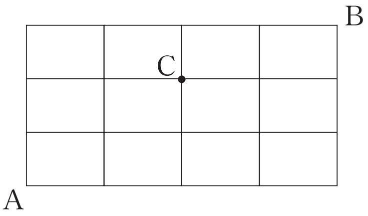
①	②	③	④	⑤
↑	→	→	↑	→

よって，求める最短経路の総数は

$$\underline{\qquad}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10\ (\text{通り})$$

4 (1) 1，1，1，2，2，3 の 6 個すべてを使ってできる 6 桁の整数は何個あるか。

(2) 右の図は，ある町の道を直線で表したものである。次の場合，遠回りをしないで行く道順は何通りあるか。



(i) A から B まで行く。

(ii) A から C を通って B まで行く。

Point Pickup

同じものを含む順列

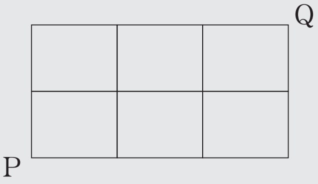
n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，
これら n 個のものをすべて 1 列に並べる順列の総数は

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots} \qquad \text{ただし } p+q+r+\cdots\cdots=n$$

組合せの考えを用いて ${}_n\mathrm{C}_p \times {}_{n-p}\mathrm{C}_q \times {}_{n-p-q}\mathrm{C}_r \times \cdots\cdots$ として求めることもできる。

最短経路の総数

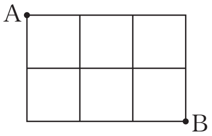
右に進むことを→，上に進むことを↑のように表すと最短経路の道順を，→と↑の「同じものを含む順列」として扱い，その総数を求めることができる。
右図において，P から Q までの最短経路の総数は，→ 3 個，↑ 2 個を 1 列に並べる順列の総数として求めればよい。



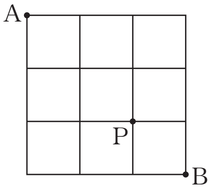
第 3 講　PART4 確認問題

1　1, 1, 2, 2, 2, 2 の 6 個すべてを使ってできる 6 桁の整数は，
全部で アイ 個ある。

2　右の図のような道がある。
A から B まで遠回りをしないで行く道順は全部で ウエ 通りある。



3　右の図のような道がある。
A から途中 P を通って B まで，遠回りをしないで行く道順は全部で オカ 通りある。



第 4 講　事象と確率

PART1 試行と事象

要点 ① 試行と事象

「試行」… 同じ条件のもとで繰り返すことができ，結果が偶然によって決まる実験や観測。

「事象」… 試行の結果として起こる事柄。事象は「　　　」を用いて表すことができる。起こりうる結果全体の集合を U とすると，U で表される事象を「全事象」といい，この試行におけるどの事象も U の部分集合で表すことができる。

例　1個のさいころを投げる試行において，例えば1の目が出ることを単に1と表すとすると

全事象 U は $U=\{\qquad\qquad\qquad\}$

奇数の目が出る事象 A は $A=\{\qquad\}$

要点 ② 同様に確からしい

「根元事象」… 起こりうる結果全体の集合を U とするとき，U のただ1つの要素からなる部分集合。

例　1個のさいころを投げる試行の根元事象は

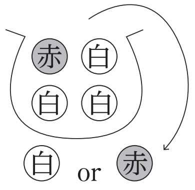
ある試行において，どの根元事象が起こることも同じ程度に期待できるとき，これらの根元事象は「　　　　　　　　　」という。

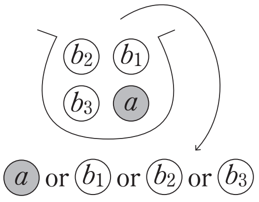
例　赤玉1個，白玉3個が入った袋から玉を1個取り出す試行において，その結果は「赤玉が出る」と「白玉が出る」の2つの場合しかない。この2つを根元事象とすると，白玉の方が「　　　　　」ので，この2つの根元事象は同様に確からしいとはいえない。

ここで，赤玉を a，白玉を b_1，b_2，b_3 とし，

全事象を $U=\{a, b_1, b_2, b_3\}$ とすると，

根元事象 $\{a\}$, $\{b_1\}$, $\{b_2\}$, $\{b_3\}$ は同様に確からしい





要点③ 確率

「確率」… ある試行において，ある事柄が起こる起こりやすさを数値で表したもの。事象 A の確率を「　　　」で表す。

ある試行において，どの根元事象も「　　　　　　　　　　　」とき，全事象 U の要素の個数を $n(U)$，事象 A の要素の個数を $n(A)$ とすると，事象 A の確率 $P(A)$ を以下のように定める。

事象 A の確率

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

例 2個のさいころを投げるとき，目の和が5になる確率を求める。

2個のさいころをA，Bとして区別し，それぞれの目とその和を表にまとめると下図。

A＼B	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

起こりうるすべての場合は

$6\times6=36$（通り）

あり，どの場合も同様に確からしい。

2個のさいころA，Bの目を

（Aのさいころの目，Bのさいころの目）

のように表すとすると，目の和が5になる場合は

(1，4)，(　，　)，(　，　)，(　，　)

の4通り。

よって，求める確率は $\frac{\quad}{\quad}=\frac{1}{9}$

上の例で，(1，4) と (4，1) はともに「2個のさいころの目が1と4」である。2個のさいころを区別し，(1，4) と (4，1) を異なる事象とすることで，各根元事象が同様に確からしい，とすることができる。

確率においては，「　　　　　　　　　　　　　　」して考えるとよい。

1

(1)　1個のさいころを投げるとき，4以下の目が出る確率を求めよ。

(2)　当たりくじが3本入っている5本のくじから1本引くとき，当たりくじを引く確率を求めよ。

(3)　2枚の10円硬貨を同時に投げるとき，1枚は表，1枚は裏になる確率を求めよ。

Point Pickup

事象 A の確率

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(U)}=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

ある事象 A の確率を考えるときは，根元事象が「同様に確からしい」必要がある。

よって，同じもの(区別できないもの)も，すべて区別して考えるとよい。

第 4 講　PART1 確認問題

1　1 個のさいころを投げるとき，5 以上の目が出る確率は

$\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

2　当たりくじが 2 本入っている 10 本のくじから 1 本引くとき，

当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

3　2 枚の 100 円硬貨を投げるとき，どちらも裏が出る確率は

$\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

PART2 順列・組合せと確率

要点① 順列と確率

APPLE に含まれる5文字を1列に並べるとき，A が左端にくる確率を求める。

2つの P を P_1，P_2 と区別すると，A，P_1，P_2，L，E の5文字を並べる方法は 通りで，

この 5! 通りは 。

左端に A がくるとき，残り4文字を並べる方法は 通り。

よって，求める確率は $=\frac{1}{5}$

※2つの P を区別しない場合，5文字の並べ方の総数は $=60$（通り）であり，この 60 通りは 。

左端に A がくるとき，残り4文字を並べる方法は $=12$（通り）。

よって，求める確率は $\frac{12}{60}=\frac{1}{5}$

このように，すべての根元事象が同様に確からしいものであれば，同じものを区別せずに考えることができるが，慣れるまでは同じものをすべて区別して考えるとよい。

要点② 組合せと確率

当たりくじが5本入っている10本のくじから同時に2本引くとき，2本とも当たりくじを引く確率を求める。

10本のくじをすべて区別すると，10本のくじから2本のくじを引く場合の数は 通りで，

この ${}_{10}C_2$ 通りは同様に確からしい。

このうち，2本とも当たりくじとなる引き方は，当たりくじ5本から2本を引く場合で，

通り。

よって，求める確率は $=\frac{10}{45}=\frac{2}{9}$

以下，「同様に確からしい」ことの確認を省略することとする。

[MEMO]

2 (1) A, B, C, D, E, F の6人が1列に並ぶとき，A, B, C の3人が隣り合う確率を求めよ。

(2) 赤玉5個，白玉2個の入った袋から，同時に3個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(i) 3個とも赤玉が出る確率　(ii) 赤玉1個と白玉2個が出る確率

Point Pickup

同じものを区別する

確率を求める際には，根元事象が同様に確からしいものとするために，同じものをすべて区別して扱うとよい。

第4講　PART2 確認問題

1　A，B，C，D，E の 5 人が 1 列に並ぶとき，A，B の 2 人が隣り合う確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

2　赤玉 3 個，白玉 4 個が入った袋から同時に玉を 2 個取り出すとき，2 個とも白玉が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

3　赤玉 3 個，白玉 4 個が入った袋から同時に玉を 2 個取り出すとき，赤玉 1 個，白玉 1 個が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ である。

PART3 確率の基本性質

要点① 積事象と和事象

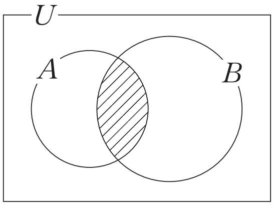
2つの事象 A，B について

「A と B がともに起こる」事象を，A と B の「　　　　　」といい，「A　B」と表す。

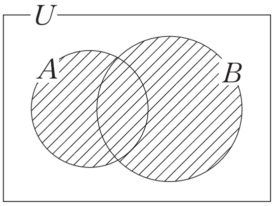
「A または B が起こる」事象を，A と B の「　　　　　」といい，「A　B」と表す。

積事象 $A\cap B$ は，集合の共通部分 $A\cap B$，和事象 $A\cup B$ は，和集合 $A\cup B$ で表される。

積事象 $A\cap B$



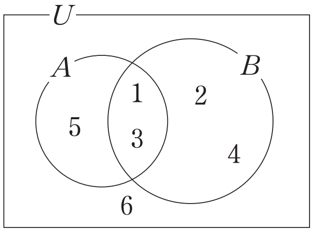
和事象 $A\cup B$



例 1個のさいころを投げる試行において，奇数の目が出る事象を A，4以下の目が出る事象を B とすると

積事象 $A\cap B=\{\quad\}$

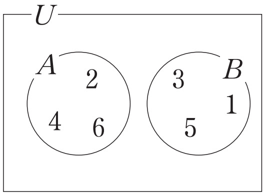
和事象 $A\cup B=\{\qquad\qquad\}$



要点② 排反事象

2つの事象 A，B が同時に起こることがないとき，A と B は「互いに　　　」である，または A と B は「互いに　　　　　」であるという。このとき，$A\cap B=$　である。

例 1個のさいころを投げる試行において，偶数の目が出る事象を A，奇数の目が出る事象を B とすると，$A\cap B=\varnothing$ であり，A と B は互いに排反である。



※ 空集合 $\varnothing$ で表される事象を「空事象」という。

※ 3つ以上の事象においては，その中の「どの2つの事象も」互いに排反であるとき，これらの事象は互いに排反である，または互いに排反事象であるという。

要点③ 確率の基本性質と加法定理

全事象 U と事象 A について，次のことが成り立つ。

$$0 \leqq n(A) \leqq n(U)$$

この式の各辺を $n(U)$ で割ると

$$0 \leqq \frac{n(A)}{n(U)} \leqq 1$$

すなわち $0 \leqq P(A) \leqq 1$ が成り立つ。特に，$P(\varnothing)=0$，$P(U)=1$ である。

2つの事象 A，B が互いに排反であるとき，$A \cap B=\varnothing$ であるから，和事象 $A \cup B$ について，次のことが成り立つ。

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)$$

この式の各辺を $n(U)$ で割ると，次の等式が成り立つ。

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

以上より，次のようにまとめることができる。

確率の基本性質

1　すべての事象 A について　$0 \leqq P(A) \leqq 1$

空事象 $\varnothing$ の確率　$P(\varnothing)=0$　　全事象 U の確率　$P(U)=1$

2　事象 A，B が互いに排反のとき　$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$

2 を確率の「　　　　　　」という。

例　赤玉3個と白玉4個が入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，2個が同じ色である確率を求める。

「2個が同じ色である」という事象は

「2個とも赤玉である」事象 A，　「2個とも白玉である」事象 B

の和事象であり，事象 A，B は互いに排反である。

事象 A の確率は $P(A)=\dfrac{{}_3C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{3}{21}$，　事象 B の確率は $P(B)=\dfrac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\dfrac{6}{21}$

確率の加法定理により，求める確率は

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{21}+\frac{6}{21}=\frac{9}{21}=\frac{3}{7}$$

※確率の加法定理は，互いに排反である3つ以上の事象に関しても同様に成り立つ。

3　1から9までの数が1つずつ書かれた9枚のカードから同時に3枚取り出す。
このとき，次の確率を求めよ。

(1)　3枚の札の数がすべて偶数，またはすべて奇数である確率

(2)　3枚の札の数の和が偶数である確率

Point Pickup

確率の加法定理

事象 A，B が互いに排反のとき

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

2つの事象 A，B の確率 $P(A)$，$P(B)$ をそれぞれ求め，その和を求めればよい。
互いに排反である3つ以上の事象に関しても，確率の加法定理は成り立つ。

第 4 講　PART3 確認問題

1から10までの数が1つずつ書かれた10枚のカードから同時に3枚を取り出す。

1 取り出した3枚のカードに書かれた数がすべて偶数であるか，すべて奇数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

2 取り出した3枚のカードに書かれた数の和が偶数である確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

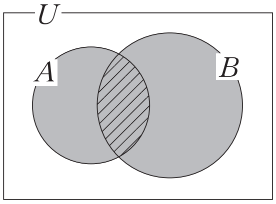
PART4 和事象の確率，余事象の確率

要点① 一般の和事象の確率

2つの集合 A，B について

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

が成り立つ。この式の各辺を $n(U)$ で割ることにより，次の等式が成り立つ。



和事象の確率

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

例 52枚1組のトランプから1枚を取り出すとき，絵札またはスペードである確率を求める。

「絵札が出る」という事象を A，「スペードである」という事象を B とすると

$P(A)=$　　，$P(B)=$

また，「絵札　　　スペードである」という事象 $A\cap B$ について

$P(A\cap B)=$

よって，求める確率は

$P(A\cup B)=$

$$=\frac{12}{52}+\frac{13}{52}-\frac{3}{52}=\frac{22}{52}=\frac{11}{26}$$

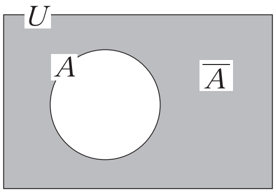
要点② 余事象の確率

事象 A に対して，「A が起こらない」という事象を，A の「　　　　　」といい，「　　」で表す。余事象 $\overline{A}$ は全事象 U における A の補集合 $\overline{A}$ で表される。

事象 A とその余事象 $\overline{A}$ は互いに排反であることから確率の加法定理により

$P(A\cup\overline{A})=$

また，A と $\overline{A}$ の和事象は全事象 U であることから



$P(A\cup\overline{A})=$

よって　$P(A)+P(\overline{A})=P(U)$　が成り立つ。

$P(U)=1$ であることから，次の等式が成り立つ。

余事象の確率

$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

例　2個のさいころを同時に投げるとき，同じ目が出ない確率を求める。

「同じ目が出ない」という事象は，「同じ目が出る」という事象の余事象である。

同じ目が出る確率は

よって，求める確率は　$=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

4 (1) 男子4人, 女子3人を横1列に並べるとき, 左端または右端が男子である確率を求めよ。

(2) 1から7までの数が書かれたカードが，各数字2枚ずつ，合計14枚ある。この中から2枚同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

(i) 少なくとも1枚は1である確率

(ii) 2枚が異なる数字である確率

Point Pickup

和事象の確率

事象 A，B について，A と B の和事象，すなわち「A または B」が起こる確率 $P(A\cup B)$ について

事象 A，B が互いに排反であるとき

$\Rightarrow$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ （確率の加法定理）

事象 A，B が互いに排反ではないとき

$\Rightarrow$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

事象 A と事象 B が同時に起こりえるか，がポイント

余事象の確率

$P(\overline{A})=1-P(A)$

ある事象 A の確率を求めるときは，その余事象 $\overline{A}$ の確率の利用をつねに頭に入れておくとよい。また，「……でない」「少なくとも……である」「同じ(異なる)」といった確率を求める際には，余事象の利用が有効な場合がある。

第4講　PART4 確認問題

1 男子3人，女子2人の合計5人が横1列に並ぶとき，左端が男子であるかまたは右端が女子である確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イウ}}$ である。

2 1から8までの数が1つずつ書かれた赤いカードと青いカードがそれぞれ8枚，合計16枚ある。この中から2枚を引くとき，引いたカードに書かれた数の和が5にならない確率は $\dfrac{\boxed{エオ}}{\boxed{カキ}}$ である。

3 1から8までの数が1つずつ書かれた赤いカードと青いカードがそれぞれ8枚，合計16枚ある。この中から2枚を引くとき，少なくとも1枚は赤いカードである確率は $\dfrac{\boxed{クケ}}{\boxed{コサ}}$ である。

第 5 講　独立な試行の確率，反復試行の確率

PART1　独立な試行の確率

要点 ①　独立な試行

ある2つの試行S，Tについて，互いに他方の結果に影響を及ぼさないとき，2つの試行は「　　　」であるという。

例　1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に投げる試行をS，2回目に投げる試行をTとすると，SとTは独立　　　　　。

当たりくじ3本を含む10本のくじをA，Bの2人がこの順に1本ずつ引く。
A，Bがくじを引く試行をそれぞれS，Tとし，引いたくじはもとに戻さないとする。Aが当たりくじを引くかはずれくじを引くかで，Bの当たりやすさが異なる。よって，SとTは独立　　　　　。

要点 ②　独立な試行の確率

1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目の試行と2回目の試行は独立である。
この2回の試行を行うとき，起こりうるすべての場合の数は　　　通りである。
また「1回目に偶数，2回目に4以下の目が出る」という事象が起こる場合の数は，
積の法則により　　　通りである。

よって，これが起こる確率をpとすると $p=$　　　$=$　　　と表される。

1個のさいころを投げるとき，「偶数の目が出る」確率は　，「4以下の目が出る」確率は　であるから，pはその「　　」であることがわかる。
一般に，次のことが成り立つ。

> **独立な試行の確率**
> 2つの試行S，Tが独立であるとき，Sでは事象A，Tでは事象Bが起こる確率pは
> $$p=P(A)\times P(B)$$

3つ以上の独立な試行についても，同様の等式が成り立つ。

例 赤玉3個，白玉2個が入っている袋から玉を1個取り出し，色を調べてからもとに戻す試行を3回続けて行うとき，1回目に白玉，2回目に赤玉，3回目に白玉を取り出す確率は

$=\dfrac{12}{125}$

要点③ 排反事象→独立な試行→加法定理

袋Aには赤玉3個，白玉2個，袋Bには赤玉4個，白玉3個が入っている。それぞれの袋から玉を1個ずつ取り出すとき，取り出した2個の玉が異なる色である確率を求める。

袋Aから玉を1個取り出す試行と，袋Bから玉を1個取り出す試行は　　　　である。
取り出した2個の玉の色が異なるという事象は，次の[1]，[2]のいずれか。

[1] 袋Aから赤玉，袋Bから白玉を取り出す

[2] 袋Aから白玉，袋Bから赤玉を取り出す

[1]の確率は $\dfrac{3}{5}\times\dfrac{3}{7}=\dfrac{9}{35}$　　[2]の確率は

[1]，[2]は互いに　　　であるから，求める確率は加法定理により

$\dfrac{9}{35}+\qquad=$

ある事象が起こる確率を求めるとき，その事象を上の[1]，[2]のように「排反な事象」に分けることで，より具体的な事象として確率を求めることができる。
上の[1]，[2]それぞれにおいては，独立な試行の確率を　　　　　　ことによって求めている。
その後，排反な事象[1][2]の結果を，加法定理により　　　　　　ことで，ある事象が起こる確率を求めることができる。

1 (1) 1個のさいころを2回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(i) 1回目に奇数の目，2回目に6の約数の目が出る確率

(ii) 少なくとも1回は6の約数の目が出る確率

(2) 袋Aには赤玉2個，白玉4個，袋Bには赤玉1個，白玉3個が入っている。
それぞれの袋から玉を2個ずつ，合計4個取り出すとき，取り出した4個の中に赤玉が1個だけ含まれる確率を求めよ。

Point Pickup

独立な試行の確率

2つの試行S，Tが「　　　」であるとき，Sでは事象A，Tでは事象Bが起こる確率pは

$$p = P(A) \times P(B)$$

つまり，それぞれの試行の確率を「　　　　」ことで求めることができる。

3つ以上の独立な試行についても，同様の等式が成り立つ。

排反事象に分ける

① 確率を求めたい事象を，「　　　事象」に分ける。

② ①のそれぞれの事象について，確率を求める。

③ ②で出した確率を「　　　　」。

第 5 講　PART1 確認問題

1　1個のさいころを2回続けて投げるとき，1回目に偶数の目が出て，2回目に5以上の目が出る確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

2　1個のさいころを2回続けて投げるとき，少なくとも1回は6の目が出る確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である。

3　袋Aには赤玉1個，白玉3個，袋Bには赤玉2個，白玉1個が入っている。
袋Aから2個, 袋Bから1個, 合計3個の玉を取り出すとき,
取り出した玉の中に赤玉が1個だけ含まれる確率は $\dfrac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$
である。

PART2 反復試行の確率

要点① 反復試行の確率

同じ条件のもとで，同じ試行を繰り返し行うとき，各回の試行は　　　である。このような独立な試行の繰り返しをまとめて「　　　　　　」という。

例 当たりくじ4本を含む10本のくじがある。引いたくじはもとに戻すとして，このくじを1本ずつ続けて3本を引くとき，1本だけ当たる確率を求める。

1本だけ当たる事象は，次の[1]，[2]，[3]のいずれか。

[1]　1本目が当たり，2本目がはずれ，3本目がはずれ

これが起こる確率は $\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{18}{125}$

[2]　1本目がはずれ，2本目が当たり，3本目がはずれ

これが起こる確率は $\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}=\frac{18}{125}$

[3]　1本目がはずれ，2本目がはずれ，3本目が当たり

これが起こる確率は $\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{18}{125}$

[1]，[2]，[3]は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{18}{125}+\frac{18}{125}+\frac{18}{125}=\frac{18}{125}\times\quad=\frac{54}{125}$$

である。

[1]，[2]，[3]が起こる確率はすべて「当たりが1本，はずれが2本」の確率であり，その出る順番によらず等しく $\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{6}{10}=$　　　　　　である。

この確率になるものは，[1]，[2]，[3]の3通りであり，この3通りは

「3回の試行のうち，当たりが出る1回を選ぶ」方法の総数　　通り

に等しい。当たりが出ない残り2回は，はずれである。

よって，求める確率は

と表される。

反復試行の確率について，次のことが成り立つ。

反復試行の確率

1 回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。

この試行を n 回繰り返し行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r\, p^r\,(1-p)^{n-r}$$

※一般に，正の数 a に関して，$a^0=1$ と定める。また，${}_n\mathrm{C}_0=1$，${}_n\mathrm{C}_n=1$ であるから

上記の式においては

$r=0$ のとき　${}_n\mathrm{C}_0\, p^0\,(1-p)^n=(1-p)^n$

$r=n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_n\, p^n\,(1-p)^0=p^n$

である。

例　赤玉 4 個，白玉 2 個が入っている袋から玉を 1 個取り出し，色を調べてからもとに戻す試行を 5 回続けて行うとき，赤玉をちょうど 2 回取り出す確率を求める。

1 回の試行で赤玉が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，白玉を取り出す確率は　　　$=\frac{1}{3}$

よって，求める確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)=10\times\frac{2^2\times1^3}{3^5}=\frac{40}{243}$$

2 1個のさいころを続けて4回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 1の目がちょうど2回出る確率

(2) 5以上の目がちょうど3回出る確率

(3) 偶数の目が2回以上出る確率

Point Pickup

反復試行の確率

同じ条件のもとで，同じ試行を n 回繰り返し行う反復試行において，ある事象 A がちょうど r 回起こるとき

① 事象 A が起こる n 回中 r 回の決め方の総数は 　　通りである。

② 1回の試行において事象 A が起こる確率が p のとき，事象 A が起こらない確率は $1-p$ であり，①のそれぞれが起こる確率はすべて等しく 　　　　　である。

③ ①，②より，ある事象 A がちょうど r 回起こる確率は

$${}_n\mathrm{C}_r p^r (1-p)^{n-r}$$

第 5 講　PART2 確認問題

1 1個のさいころを続けて3回投げるとき，6の目がちょうど1回出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$ である。

2 1個のさいころを続けて4回投げるとき，1または2の目がちょうど2回出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}}$ である。

3 1個のさいころを続けて5回投げるとき，偶数の目が4回以上出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。

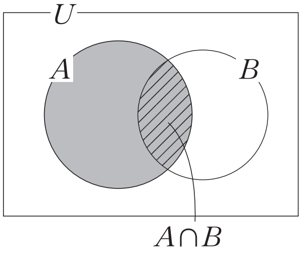
第6講　条件付き確率，期待値

PART1　条件付き確率

要点①　条件付き確率

事象 A が起こったとわかっているときの，事象 B が起こる確率を，A が起こったときの B の起こる「　　　　　　　　　　」といい，「　　　　」と表す。

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

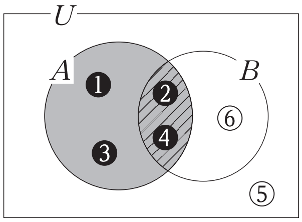


事象 A が起こったとわかっているので，事象 A を「全事象」と考えた上で，事象「$A\cap B$」が起こる場合の確率を考えればよい。

例　赤玉4個と白玉2個が入っている袋があり，赤玉には1から4まで，白玉には5と6の数字が書かれている。この袋の中から1個の玉を取り出したとき，玉の色が赤であった。このとき，その玉に書かれた数字が偶数である確率を求めたい。

赤玉が出る事象を A，玉に書かれた数字が偶数である事象を B とすると，求める条件付き確率は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}=$$



である。

「赤玉が出る」ことが前提なので，赤玉4個を母集団と考え，その中の偶数を考える。

上の例は，右のような表に整理することができる。これをもとに，「取り出した玉の色が白であったとき，その番号が偶数である」条件付き確率は

$$P_{\ }(\ \ )=\frac{n(\qquad)}{n(\ \ )}=$$

であることがわかる。

A＼B	B	$\overline{B}$
A	❷　❹	❶　❸
$\overline{A}$	⑥	⑤

要点② 確率の乗法定理

条件付き確率の定義式

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)} \quad \cdots\cdots ①$$

①の式の右辺の分母・分子を，全事象 U の起こる場合の数 $n(U)$ で割ると，次の式が得られる。

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad \cdots\cdots ②$$

②の式の分母を払うと，次の等式が成り立つ。

確率の乗法定理

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

例 赤玉4個と白玉2個が入っている袋から，玉を1個取り出し，もとに戻さず続けてもう1個の玉を取り出す。このとき，2個とも赤玉である確率を求める。

1個目が赤玉である事象を A，2個目が赤玉である事象を B とする。

1個目が赤玉である確率は　　$=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ である。

1個目が赤玉であるとき，残りの玉は赤玉　個，白玉　個である。この中から赤玉を取り出す確率は　　＝　である。

よって，2個とも赤玉である確率は，確率の乗法定理により

$$P(A\cap B)=\quad\times\quad=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

2つの試行S，Tにおいて，試行Sで事象 A が起こり，かつ試行Tで事象 B が起こる確率 $P(A\cap B)$ は

S，Tが「独立」，つまり互いの結果に影響を及ぼさない場合は

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (独立な試行の確率)

S，Tが「独立ではない」，つまりSの結果によってTの結果が変化する場合は

$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$ (確率の乗法定理)

である。

1 当たりくじ4本を含む20本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，1本ずつ2回続けてくじを引く。このとき次の確率を求めよ。

(1) 1回目に当たりくじを引いたとき，2回目も当たりくじを引く確率

(2) 2回とも当たりくじを引く確率

(3) 2回目に当たりくじを引く確率

Point Pickup

条件付き確率

事象 A が起こったときに事象 B が起こる確率（A が起こったときの B の起こる条件付き確率）は

$$P_A(B)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}\ \cdots\cdots①\qquad P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}\ \cdots\cdots②$$

②は，確率や割合がわかっている場合に用いるとよい。

確率の乗法定理

事象 A，B がともに起こる確率 $P(A\cap B)$ は

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$

$P_A(B)$ は，事象 A が起こったあとの状態を考え，その状態で事象 B が起こるときの確率を考える。

第 6 講　PART1 確認問題

当たりくじ3本を含む10本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，1本ずつ2回続けてくじを引く。

1　1回目にはずれくじを引いたとき，2回目に当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ である。

2　2回とも当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エオ}}$ である。

3　2回目に当たりくじを引く確率は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キク}}$ である。

PART2 期待値

要点① 期待値

1000本中1本が当たりのくじで，その賞金が10000円であるとき，くじ1本あたりの賞金額の平均は

$$10000 \div 1000 = 10 \text{（円）}$$

である。この式は

$$10000 \div 1000 = 10000 \times \frac{1}{1000}$$

と表すことができる。

10000は賞金額であり，$\frac{1}{1000}$ は，このくじを1本引いたときの当たりくじを引く確率であるから，このくじ1本あたりの賞金額の平均は，賞金額とそれが当たる確率の　　と考えることができる。

同様に，1000本のくじがあり，賞金および本数が右の表であるとき，くじ1本あたりの賞金額の総額は

$$10000 \times 1 + 2000 \times 3 + 0 \times 996 = 16000 \text{（円）}$$

であるから，くじ1本あたりの賞金額の平均は

$$16000 \div 1000 = 16 \text{（円）}$$

である。ここで

	賞金	本数
1等	10000円	1本
2等	2000円	3本
はずれ	0円	996本
合計		1000本

$$16000 \div 1000 = (10000 \times \quad + 2000 \times \quad + 0 \times \qquad) \times \frac{1}{1000}$$

$$= \qquad \times \frac{\quad}{1000} + \qquad \times \frac{\quad}{1000} + \quad \times \frac{\quad}{1000}$$

と表すことができることから，このくじ1本あたりの賞金額の平均は，賞金額とそれが当たる確率の　　をすべて足し合わせたものと考えることができる。

一般に，ある試行によって起こる事象 A_1，A_2，……，A_n が互いに排反事象で，これらの事象が起こる確率をそれぞれ p_1，p_2，……，p_n $(p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1)$ とする。

また，A_1，A_2，……，A_n が起こるとき，変量 X がそれぞれ x_1，x_2，……，x_n という値をとるとする。このとき

$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

を変量 X の「　　　　　」という。

期待値

変量 X のとりうる値を x_1, x_2, ……, x_n とし，それぞれの値をとる確率を p_1, p_2, ……, p_n とすると，期待値 E は

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	……	x_n	計
確率	p_1	p_2	……	p_n	1

例　1個のさいころを投げるとき，出る目の期待値を求める。

1 ～ 6 のどの目が出る確率も $\frac{1}{6}$ であるから，出る目の期待値は

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\ (=3.5)$$

結果が偶然に左右されるような不確実な事柄において，意思決定の基準として期待値を利用することができる。例えば，あるゲームの参加料が1000円であるとして，そのゲームに参加したときにもらえる金額の期待値を計算すると900円であったとすると，もらえる金額の期待値が参加料よりも　　　　　から，このゲームに参加することは得である　　　　　　　　。

2 赤玉2個，白玉3個が入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 赤玉1個につき100円をもらえるとき，1回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

Point Pickup

期待値

変量 X のとりうる値と，X がそれらの値をとる確率が右の表の通りであるとき，X の期待値 E は

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	……	x_n	計
確率	p_1	p_2	……	p_n	1

第 6 講　PART2 確認問題

赤玉 2 個，白玉 4 個が入った袋から，同時に 2 個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

1　赤玉の個数の期待値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\ (\text{個})$$

2　赤玉 1 個につき 100 円もらえるとき，1 回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\ (\text{円})$$

第 7 講　三角形の性質
PART1　線分の内分・外分，角の二等分線と比

要点 ①　線分の内分と外分

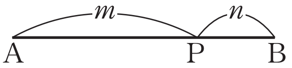
m，n を正の数とする。

線分 AB 上に点 P があり

$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=m:n$

が成り立つとき，点 P は線分 AB を $m:n$ に

「　　　」するという。



m，n を異なる正の数とする。

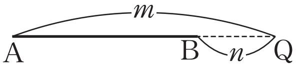
線分 AB の延長上に点 Q があり，

$\mathrm{AQ}:\mathrm{QB}=m:n$

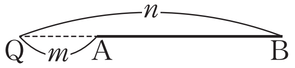
が成り立つとき，点 Q は線分 AB を $m:n$ に

「　　　」するという。

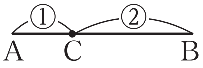
$m>n$ のとき



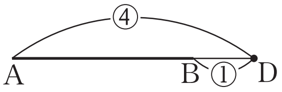
$m<n$ のとき



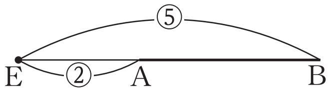
例　線分 AB を 1：2 に内分する点 C



線分 AB を 4：1 に外分する点 D

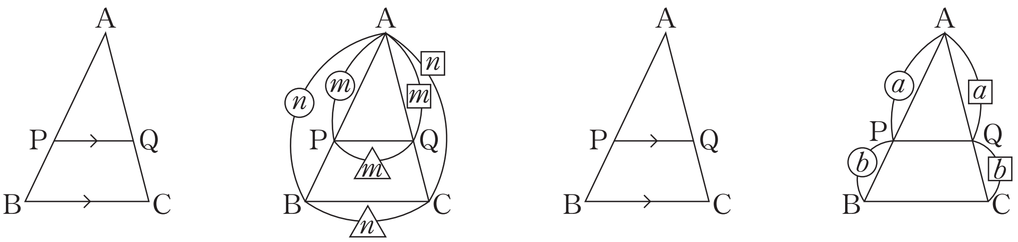


線分 AB を 2：5 に外分する点 E



要点 ②　三角形の角の二等分線と比

三角形における平行線と線分の比について，次のことが成り立つ。



PQ // BC　⟺　AP：AB＝AQ：AC

PQ // BC　⟹　AP：AB＝PQ：BC

PQ // BC　⟺　AP：PB＝AQ：QC

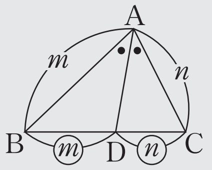
三角形の内角の二等分線に関して，次の定理が成り立つ。

三角形の内角の二等分線と比

△ABC の ∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とすると，

D は BC を AB：AC に内分する。

つまり BD：DC＝AB：AC である。



（証明）

点 C を通り直線 AD に平行な直線を引き，辺 BA の延長との交点を E とすると，AD ∥ EC より

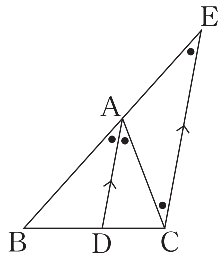
∠BAD＝∠AEC

∠DAC＝∠ACE

∠BAD＝∠DAC より ∠AEC＝∠ACE

よって，△ACE は二等辺三角形であるから，AE＝AC

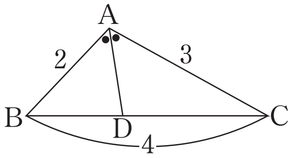
また，AD ∥ EC より BD：DC＝BA：AE　　したがって，BD：DC＝AB：AC



例　右図の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 BD の長さを求める。

BD：DC＝　　：　　＝2：3

よって BD＝4　　　＝4　　＝$\frac{8}{5}$

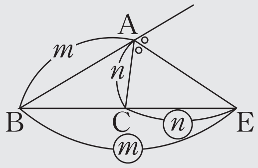


三角形の外角の二等分線に関して，次の定理が成り立つ。

三角形の外角の二等分線と比

AB≠AC である △ABC の ∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とすると，E は BC を AB：AC に外分する。

つまり BE：EC＝AB：AC である。



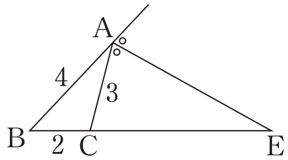
※AB＝AC のときは，外角の二等分線は辺 BC と平行になる。

例　右図の △ABC において，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とするとき，線分 CE の長さを求める。

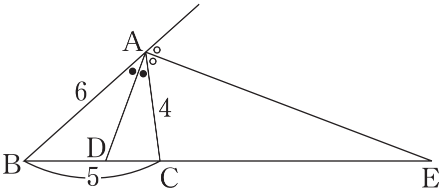
BE：EC＝　　：　　＝4：3

CE＝x とおくと　$(x+2):x=4:3$　　$3(x+2)=4x$

$x=6$　　よって CE＝6



1 AB＝6，BC＝5，CA＝4 の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。



(1) 線分 BD の長さを求めよ。

(2) 線分 CE の長さを求めよ。

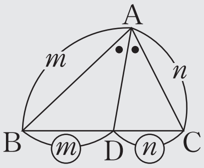
(3) 線分 DE の長さを求めよ。

Point Pickup

三角形の角の二等分線と比

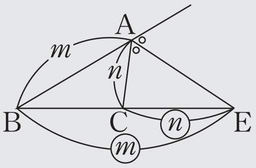
△ABC において

AD が ∠A の二等分線のとき



BD：DC＝AB：AC

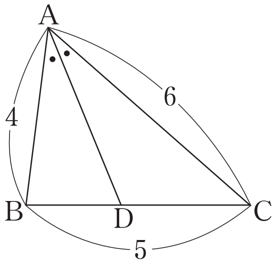
AE が ∠A の外角の二等分線のとき



BE：EC＝AB：AC

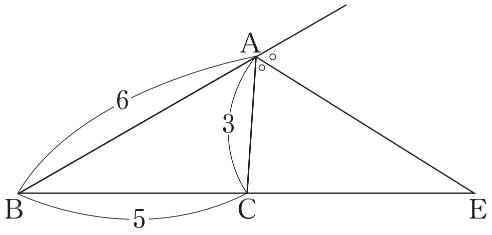
第 7 講　PART1 確認問題

1 AB＝4，BC＝5，CA＝6 の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とする。



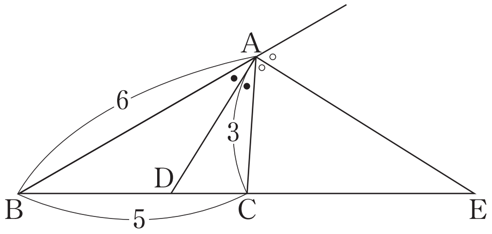
このとき，BD＝ ア である。

2 AB＝6，BC＝5，CA＝3 の △ABC において，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。



このとき，CE＝ イ である。

3 AB＝6，BC＝5，CA＝3 の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。

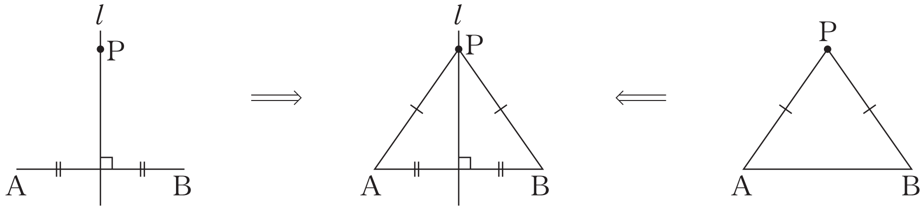


このとき，DE＝$\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$ である。

PART2 三角形の外心・内心

要点① 三角形の外心

線分 AB の垂直二等分線を l とすると，l 上の点 P は，2 点 A，B から等距離にある。
また，2 点 A，B から等距離にある点 P は，l 上にある。



上記より，次のことがいえる。

> 三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。

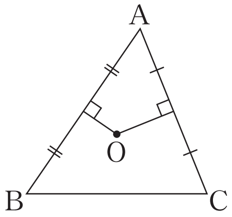
（証明）

△ABC の 2 辺 AB，AC の垂直二等分線の交点を O とすると

，

よって，OB＝OC より，点 O は　　　　　　　　　　　にある。

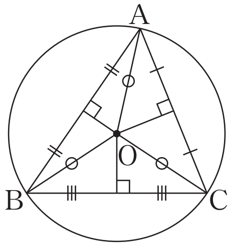
したがって，三角形の 3 辺の垂直二等分線は 1 点で交わる。



上記の証明より，△ABC の 3 辺の垂直二等分線の交点 O について

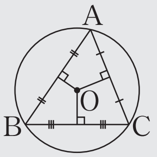
$$OA = OB = OC$$

である。よって，点 O を中心とし，三角形の 3 頂点 A，B，C を通る円をかくことができる。この円を △ABC の「　　　　　」といい，その中心 O を △ABC の「　　　」という。

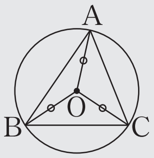


三角形の外接円と外心

三角形の 3 つの頂点を通る円はただ 1 つ存在し，その円を「外接円」，その中心を「外心」という。



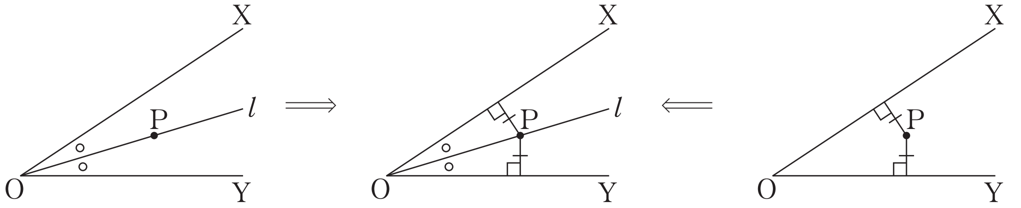
外心は 3 辺の垂直二等分線の交点



$OA = OB = OC$

要点② 三角形の内心

$\angle$XOY の二等分線を l とすると，l 上の点 P は，2 辺 OX，OY から等距離にある。
また，2 辺 OX，OY から等距離にある点 P は，l 上にある。



上記より，次のことがいえる。

三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。

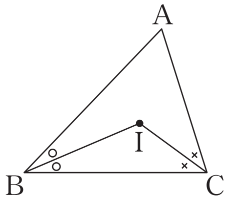
（証明）

△ABC において ∠B，∠C の二等分線の交点を I とし，I から辺 BC，CA，AB に下ろした垂線をそれぞれ ID，IE，IF とすると

，

よって，IE = IF より，点 I は　　　　　　　　　　　　にある。

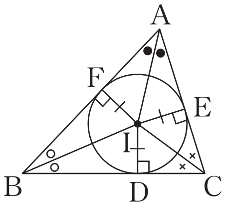
したがって，三角形の 3 つの内角の二等分線は 1 点で交わる。



上記の証明より，△ABC の 3 つの内角の二等分線の交点 I について

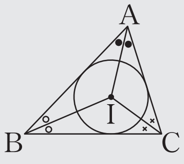
ID = IE = IF

である。これと，ID ⊥ BC，IE ⊥ CA，IF ⊥ AB であることから，点 I を中心とし，三角形の 3 辺 AB，BC，CA に接する円をかくことができる。この円を △ABC の「　　　　　」といい，その中心 I を △ABC の「　　　」という。

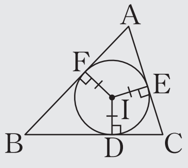


三角形の内接円と内心

三角形の 3 つの辺に接する円はただ 1 つ存在し，その円を「内接円」，その中心を「内心」という。



内心は 3 つの内角の二等分線の交点

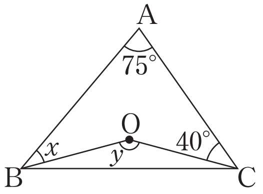


ID = IE = IF

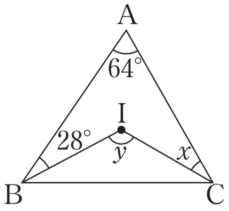
ID ⊥ BC，IE ⊥ CA，IF ⊥ AB

2 下の図において，点 O は △ABC の外心，点 I は △ABC の内心である。x, y の値を求めよ。

(1)



(2)



Point Pickup

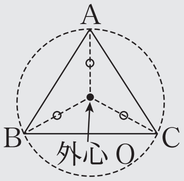
三角形の外心・内心

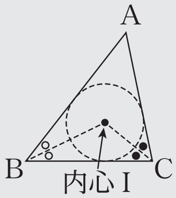
三角形の外心 … 3 辺の垂直二等分線の交点

外接円をかき，半径や円周角，中心角を意識するとよい。

三角形の内心 … 3 つの内角の二等分線の交点

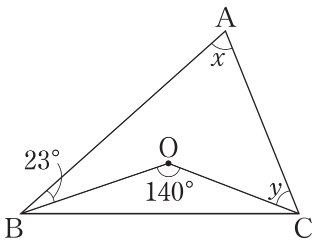
角の二等分線を意識し，等しい角に注目するとよい。





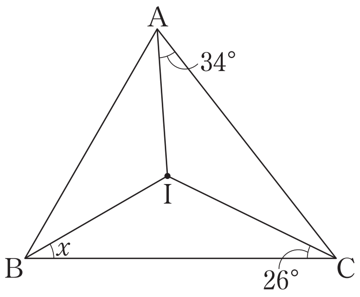
第7講 PART2 確認問題

1 次の図で，点Oは△ABCの外心である。



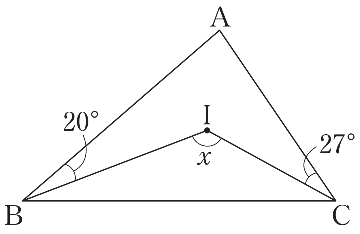
このとき，$x=$ **アイ** °，$y=$ **ウエ** ° である。

2 次の図で，点Iは△ABCの内心である。



このとき，$x=$ **オカ** ° である。

3 次の図で，点Iは△ABCの内心である。

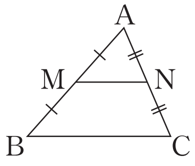


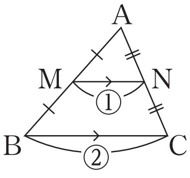
このとき，$x=$ **キクケ** ° である。

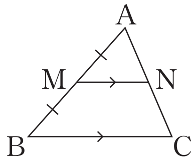
PART3 三角形の重心

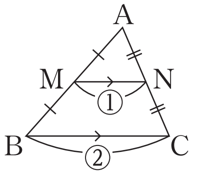
要点 ① 三角形の重心

三角形の辺の中点について，次のことが成り立つ。





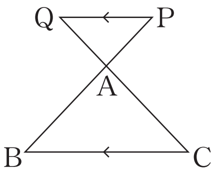


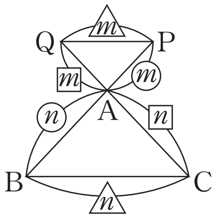


辺 AB の中点を M
辺 AC の中点を N ⟹ MN // BC
MN：BC＝1：2

辺 AB の中点を M
MN // BC ⟹ N は辺 AC の中点
MN：BC＝1：2

また，三角形における平行線と線分の比について，次のことが成り立つ。

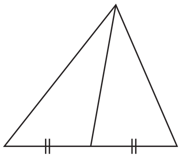




PQ // BC ⟺ AP：AB＝AQ：AC

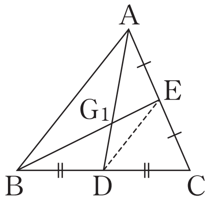
PQ // BC ⟹ AP：AB＝PQ：BC

三角形の頂点とその対辺の中点を結んだ線分を「　　　」という。
三角形の中線について，次のことがいえる。



> 三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その交点はそれぞれの中線を 2：1 に内分する。

(証明)

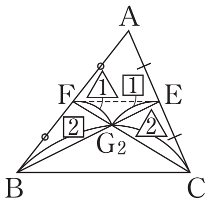


△ABC の中線 AD と中線 BE の交点を G_1 とすると，
D，E はそれぞれ辺 BC，CA の中点であるから

　　　　　　　　　　，

よって，$AG_1：G_1D＝AB：ED＝2：1$

　　　　$BG_1：G_1E＝AB：ED＝2：1$



同様に，△ABC の中線 BE と中線 CF の交点を G_2 とすると，

　　$BG_2：G_2E＝2：1$，$CG_2：G_2F＝2：1$

G_1，G_2 はともに中線 BE を 2：1 に内分する点より，この 2 点は一致する。

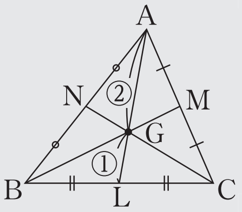
したがって，3 本の中線は 1 点で交わり，その交点は各中線を 2：1 に内分する。

三角形の 3 本の中線が交わる点を，三角形の「　　　」という。

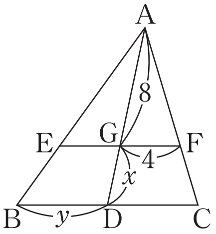
三角形の重心

三角形の 3 本の中線は 1 点で交わり，その交点を「重心」という。

重心は各中線を 2：1 に内分する。



3　下の図において，点 G は △ABC の重心で，EF // BC である。x，y の値を求めよ。



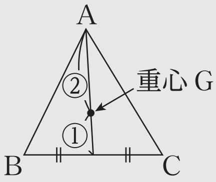
Point Pickup

三角形の重心

三角形の重心 … 3 本の中線の交点

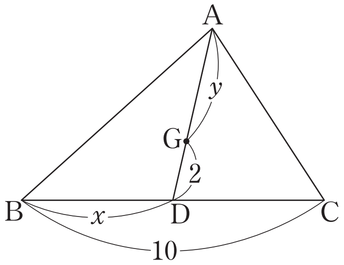
・三角形の重心は中線を 2：1 に内分する

・三角形の重心と頂点を結ぶ直線は，その頂点の対辺の中点を通る



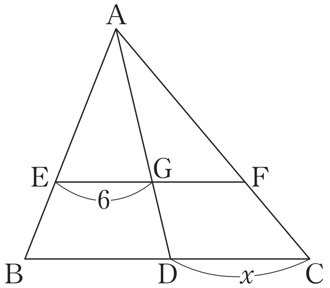
第 7 講　PART3 確認問題

1　次の図において，点 G は △ABC の重心である。



このとき，$x=$ **ア** ，$y=$ **イ** である。

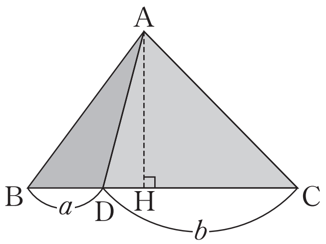
2　次の図において，点 G は △ABC の重心で，EF // BC である。



このとき，$x=$ **ウ** である。

PART4 三角形の線分の比と面積比

要点① 三角形の線分の比と面積比



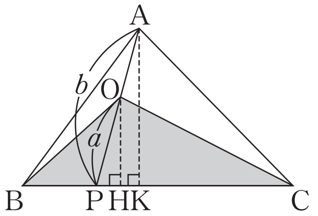
右図において，△ABD と △ACD は，底辺をそれぞれ辺 BD，辺 CD とすると，高さがともに線分 AH であるから

△ABD：△ACD＝BD：CD＝a：b

である。これを，比の値を使って

＝　＝

と表すことができる。

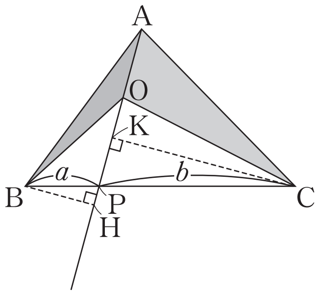


右図において，△OBC と △ABC は，底辺を辺 BC とすると，高さがそれぞれ線分 OH，線分 AK であるから

＝

また，OH∥AK であるから $\dfrac{\text{OH}}{\text{AK}}=\dfrac{\text{OP}}{\text{AP}}=\dfrac{a}{b}$

よって $\dfrac{\triangle\text{OBC}}{\triangle\text{ABC}}=\dfrac{\text{OP}}{\text{AP}}=\dfrac{a}{b}$ である。



右図において，△OAB と △OAC は，底辺を辺 OA とすると，高さがそれぞれ線分 BH，線分 CK であるから

＝

また，BH∥CK であるから $\dfrac{\text{BH}}{\text{CK}}=\dfrac{\text{BP}}{\text{CP}}=\dfrac{a}{b}$

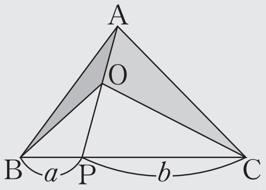
よって $\dfrac{\triangle\text{OAB}}{\triangle\text{OAC}}=\dfrac{\text{BP}}{\text{CP}}=\dfrac{a}{b}$ である。

以上より，次のことが成り立つ。

三角形の線分の比と面積比

△ABC の内部にある点を O とし，直線 AO と辺 BC の交点を P とすると

$$\frac{\triangle\text{OAB}}{\triangle\text{OAC}}=\frac{\text{BP}}{\text{CP}}=\frac{a}{b}$$



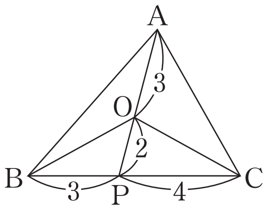
[MEMO]

4 右の図の △ABC において，次のものを求めよ。

(1)　△ABP：△ACP

(2)　△OBC：△ABC

(3)　△OAB：△OAC



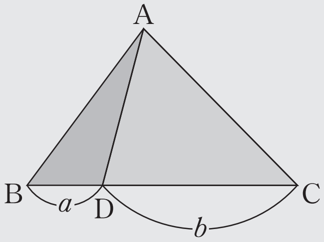
Point Pickup

三角形の線分の比と面積比

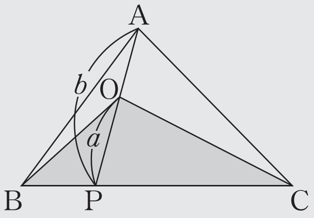
2つの三角形において

・高さが等しいならば　(面積比)＝(底辺の比)

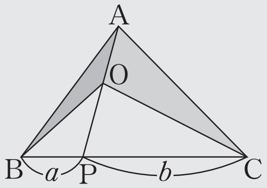
・底辺が等しいならば　(面積比)＝(高さの比)



$$\frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{BD}{CD}=\frac{a}{b}$$



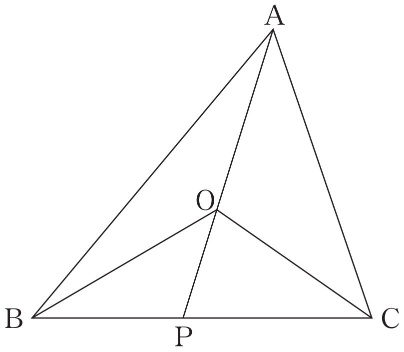
$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OP}{AP}=\frac{a}{b}$$



$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}=\frac{BP}{CP}=\frac{a}{b}$$

第7講　PART4 確認問題

次の図の △ABC において，点 P は辺 BC 上の点，点 O は線分 AP 上の点であり，BP：PC＝4：5，AO：OP＝5：3 である。



次の三角形の面積の比を求めよ。

1　△ABP：△ACP＝ ア ： イ

2　△OBC：△ABC＝ ウ ： エ

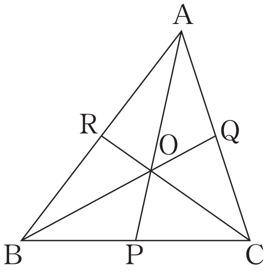
3　△OAB：△OAC＝ オ ： カ

PART5 チェバの定理，メネラウスの定理

要点① チェバの定理

右図の △ABC において

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\underline{\qquad\qquad},\quad \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}},\quad \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}$$



が成り立つ。3つの等式を辺々かけて

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\triangle\mathrm{OAB}}{\triangle\mathrm{OCA}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OBC}}{\triangle\mathrm{OAB}}\cdot\frac{\triangle\mathrm{OCA}}{\triangle\mathrm{OBC}}$$

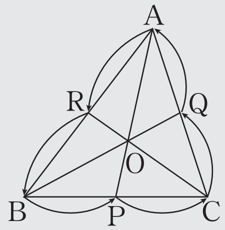
が成り立つ。

よって，三角形とその内部の1点について，次のことが成り立つ。

チェバの定理

△ABC の内部にある点 O と，三角形の 3 つの頂点 A，B，C を結んだ直線 AO, BO, CO が, 3 辺 BC, CA, AB とそれぞれ点 P, Q，R で交わるとき

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$



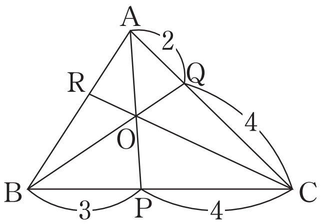
※チェバの定理は，点 O が △ABC の外部にある場合にも成り立つ。

例 右の図の △ABC において，AR：RB を求める。

チェバの定理より

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1 \quad \text{すなわち}\quad \frac{\ }{\ }\cdot\frac{\ }{\ }\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

よって $\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\frac{\ }{\ }$ より　AR：RB＝



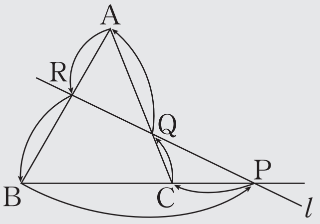
要点② メネラウスの定理

三角形と1つの直線について，次のことが成り立つ。

メネラウスの定理

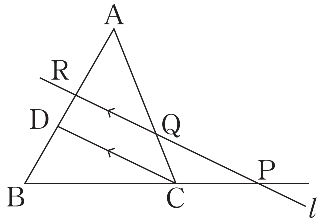
△ABC の頂点を通らない直線 l が，△ABC の辺 BC, CA，AB およびその延長とそれぞれ点 P，Q，R で交わるとき

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$



（証明）

頂点 C を通り直線 l に平行な直線を引き，直線 AB との交点を D とすると



PR // CD より　$\frac{BP}{PC}=\frac{BR}{RD}$

QR // CD より　$\frac{CQ}{QA}=\frac{DR}{RA}$

よって　$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=\frac{BR}{RD}\cdot\frac{DR}{RA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$

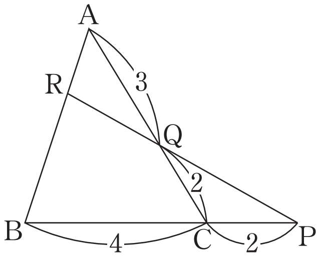
※メネラウスの定理は，△ABC の3辺すべての延長が直線 l と交わる場合にも成り立つ。

例　右の図の △ABC において，AR：RB を求める。

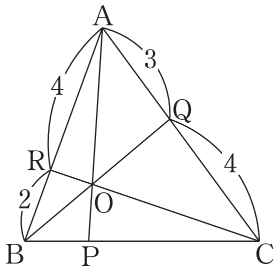
メネラウスの定理より

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\ }{\ }\cdot\frac{\ }{\ }\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

よって $\frac{AR}{RB}=\frac{\ }{\ }$ より　AR：RB＝

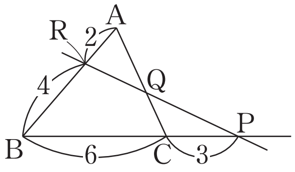


5 (1) 右の図において，BP：PC を求めよ。

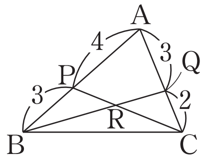


(2) 下の図において，次の比を求めよ。

(i) CQ：QA



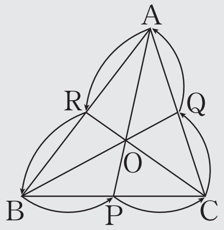
(ii) PR：RC



Point Pickup

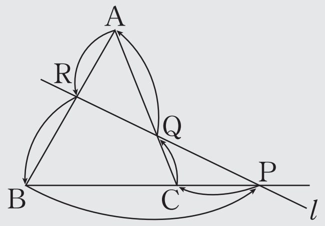
チェバの定理，メネラウスの定理

チェバの定理



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

メネラウスの定理



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$$

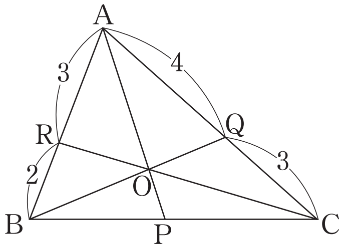
・3 頂点から引いた直線が 1 点で交わる　→　チェバの定理

・三角形と 1 直線　→　メネラウスの定理

第7講　PART5 確認問題

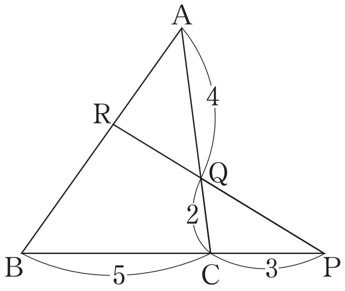
次の図において，与えられた線分の比を最も簡単な整数の比で表せ。

1



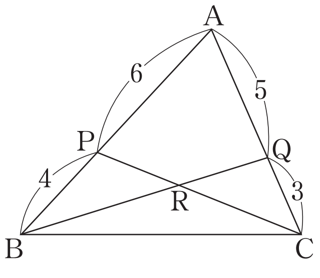
BP：PC＝ ア ： イ

2



AR：RB＝ ウ ： エ

3

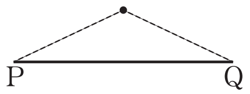


PR：RC＝ オ ： カ

PART6 三角形の辺と角

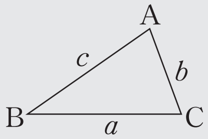
要点① 三角形の3辺の大小関係

2点P，Q間の最短距離は，線分PQの長さである。
よって，以下のことがいえる。



三角形の3辺の大小関係

三角形において，2辺の長さの和は
他の1辺の長さよりも大きい。



△ABCにおいては，$a<b+c$，$b<c+a$，$c<a+b$ が成り立つ。また，

$$b<c+a \iff b-c<a,\quad c<a+b \iff c-b<a$$

と変形できることから，三角形において，2辺の長さの差は他の1辺の長さよりも小さい。

逆に，正の数 a，b，c が

$$a<b+c,\quad b<c+a,\quad c<a+b$$

を満たすとき，3辺の長さを a，b，c とする三角形が存在する。また，

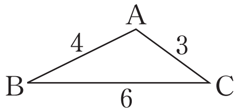
$$b<c+a \iff b-c<a,\quad c<a+b \iff c-b<a$$

と変形できることから，3辺の長さを a，b，c とする三角形が存在するための条件は

$$|b-c|<a<b+c$$

である。

例 $a=6$，$b=3$，$c=4$ のとき，$|b-c|=|3-4|=1$，$b+c=7$ より
$|b-c|<a<b+c$ が成り立つ。
よって，3辺の長さを a，b，c とする三角形が存在する。



※ a，b，c の中で a が最大であれば，$|b-c|<a$ は必ず成立する。このとき，3辺の長さを a，b，c とする三角形が存在するための条件は $a<b+c$ である。

要点② 三角形の辺と角の大小関係

一般に，三角形の辺と角の大小について，次のことがいえる。

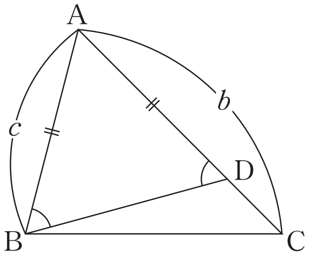
△ABC において

$b>c \implies \angle B>\angle C$

（証明）

$b>c$ より辺 AC 上に AB＝AD となる点 D をとることができる。このとき △ABD は二等辺三角形であるから

$\angle ABD=\angle ADB$



$\angle B>\angle ABD$ より　$\angle B>\angle ADB$

$\angle ADB=\angle C+\angle DBC$ より　$\angle ADB>\angle C$

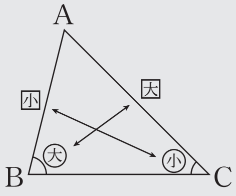
よって　$\angle B>\angle C$

$\angle B>\angle C \implies b>c$　も成り立つことが知られている。

よって，以下のことがいえる。

三角形の辺と角の大小関係

三角形の 2 辺の大小関係と，その対角の大小関係は一致する。



このことより，三角形において，最大辺の対角が最大角であり，最大角の対辺が最大辺であることがわかる。

6 (1) 次の長さの線分を3辺とする三角形が存在するかどうかを調べよ。

(i) 5，12，15　　(ii) 6，3，2

(2)(i) AB＝4，BC＝5，CA＝7 である △ABC において，3つの角 ∠A，∠B，∠C のうちもっとも大きいものを答えよ。

(ii) ∠A＝60°，∠B＝40° である △ABC において，3辺 AB，BC，CA のうちもっとも大きいものを答えよ。

Point Pickup

三角形の成立条件

$|b-c|<a<b+c$ が成り立つとき，a，b，c を3辺とする三角形が存在する。

とくに a が最大のときは，$a<b+c$ が成り立てば三角形が存在する。

三角形の辺と角の大小関係

三角形において，2辺の大小関係と，その対角の大小関係は一致する。

とくに，最大辺の対角は最大角，最大角の対辺は最大辺である。

第 7 講　PART6 確認問題

1　3 辺の長さが 3，5，8 である三角形は，[ア]。

[ア] は次の①，②のうちから選べ。

①　存在する　　　　②　存在しない

2　3 辺の長さが 4，7，10 である三角形は，[イ]。

[イ] は次の①，②のうちから選べ。

①　存在する　　　　②　存在しない

3　AB＝5，BC＝6，CA＝4 である △ABC において，3 つの内角のうち最も大きいものは [ウ] である。[ウ] は次の①～③のうちから選べ。

①　∠A　　②　∠B　　③　∠C

4　∠A＝50°，∠B＝70° である △ABC において，3 辺のうち最も大きいものは [エ] である。[エ] は次の①～③のうちから選べ。

①　AB　　②　BC　　③　CA

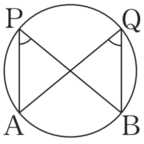
第 8 講　円の性質

PART1 円に内接する四角形

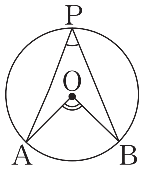
要点① 円に内接する四角形の性質

円周角の定理

1つの弧に対する円周角の大きさは一定であり，その弧に対する中心角の大きさの半分である。



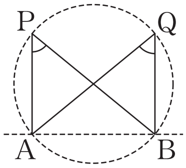
$\angle APB = \angle AQB$



$\angle APB = \frac{1}{2}\angle AOB$

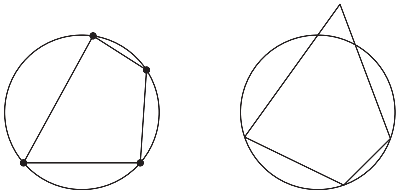
円周角の定理の逆

2点P, Qが直線ABに関して同じ側にあるとき，$\angle APB = \angle AQB$ ならば，4点A，B，P，Qは同一円周上にある。



四角形の4つの頂点が同一円周上にあるとき，その四角形は円に「　　　　　　」という。

三角形は必ず円に内接するが，四角形は必ずしも円に内接するとは限らない。



円に内接する四角形ABCDにおいて，$\angle BAD = x$，$\angle BCD = y$ とおくと，円周角の定理により

弧BADに関する中心角は $2x$

弧BCDに関する中心角は $2y$

である。

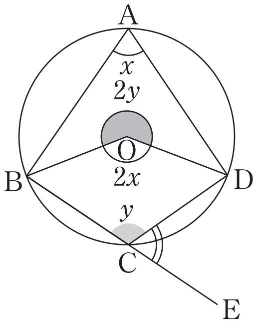
$2x + 2y =$　　　より $x + y =$　　　……①

つまり $\angle BAD + \angle BCD =$　　　である。

また $\angle ECD = 180° - y$ であり，①より $180° - y = x$ であるから，

$\angle ECD = x$　つまり $\angle ECD =$　　　　　である。

以上より，次のことが成り立つ。

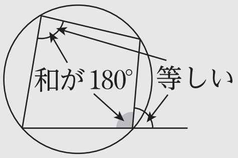


円に内接する四角形の定理

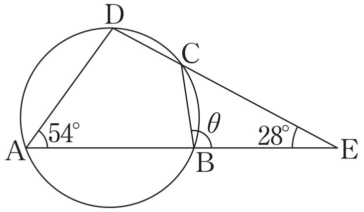
円に内接する四角形において

1　対角の和は 180° である。

2　内角は，その対角の外角に等しい。



例　右の図において，θ を求める。



$\angle BCD = \qquad\qquad\qquad = 180° - 54° = 126°$

よって $\theta = \angle BCD - \angle BEC = 126° - 28° = 98°$

(別解)

$\angle BCE = \qquad\qquad = 54°$

よって $\theta = 180° - (\angle BCE + \angle BEC) = 180° - (54° + 28°) = 98°$

要点② 四角形が円に内接するための条件

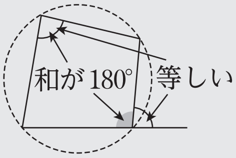
円に内接する四角形の定理は，その逆も成り立つ。

四角形が円に内接するための条件

次の **1** または **2** が成り立つ四角形は，円に内接する。

1　1組の対角の和が 180° である。

2　1つの内角が，その対角の外角に等しい。

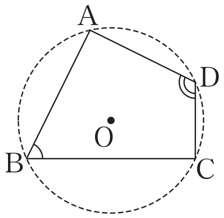


(**1** の証明)

四角形 ABCD において

$\angle ABC + \angle ADC = 180°$　……①

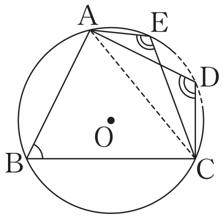
とする。



△ABC の外接円 O をかき，AC に関して B と反対側の円周上に点 E をとると，四角形 ABCE は円に内接する。

よって

$\angle ABC + \angle AEC = 180°$　……②



①，②より $\angle ADC = \angle AEC$

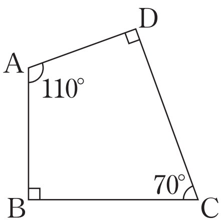
よって，円周角の定理の逆から，4点 A，C，D，E は同一円周上にあり，その円は円 O である。

したがって，4点 A，B，C，D は同一円周上にあるから，四角形 ABCD は円に内接する。

例　右の四角形 ABCD において

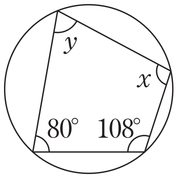
$\angle A + \angle C = 110° + 70° = 180°$

よって，四角形 ABCD は円に内接する。

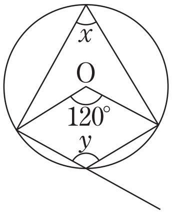


1 (1) 次の図において，x，y を求めよ。

(i)

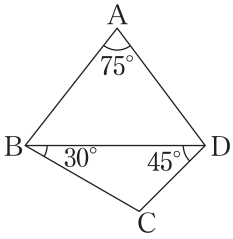


(ii)

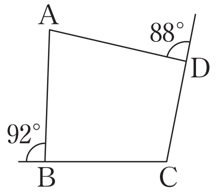


(2) 次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを答えよ。

①



②



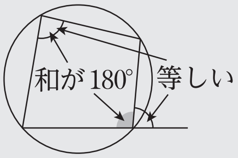
Point Pickup

円に内接する四角形

円に内接する四角形において

1 (対角の和) = 180°

2 (ある内角) = (その対角の外角)

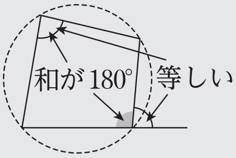


四角形が円に内接する条件

1 (1組の対角の和) = 180°

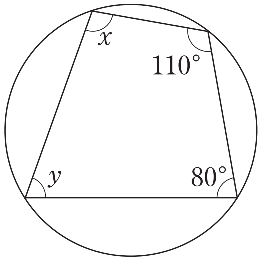
2 (ある内角) = (その対角の外角)

のいずれかが成立すれば，円に内接



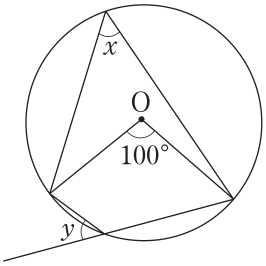
第 8 講　PART1 確認問題

1　次の図で，x，y を求めよ。



$x=$ アイウ °，$y=$ エオ °

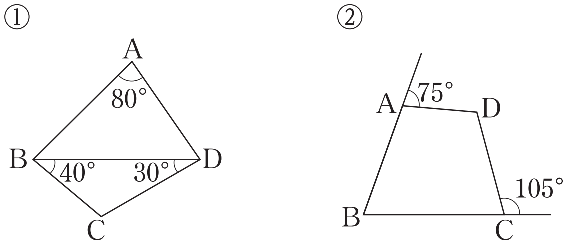
2　次の図で，x，y を求めよ。



O は円の中心

$x=$ カキ °，$y=$ クケ °

3　次の①，②の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを選べ。 コ

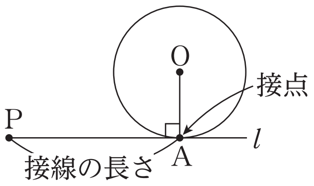


PART2 円と接線

要点① 円の接線と接線の長さ

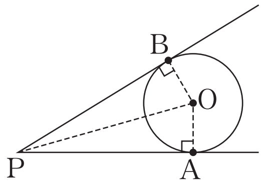
円Oの円周上の点Aを通る直線 l について，
次のことが成り立つ。

直線 l（円Oの接線） $\Longleftrightarrow$ OA　 l



このとき，点Aは円Oと直線 l の接点である。

また，円外の1点から円に接線を引いたとき，その点から接点までの距離を「　　　　　　　　」という。

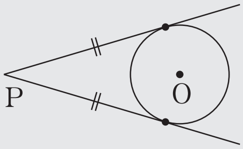


右図のように，円外の1点から円Oに対して2本の接線を引くことができる。このとき，△PAO ≡ △PBO であるから，PA = PB である。

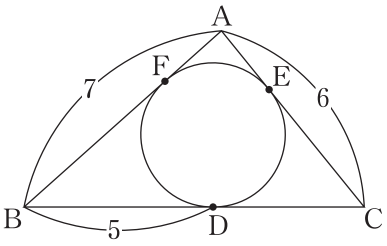
円の接線の長さについて，次のことが成り立つ。

接線の長さ

円外の1点からその円に引いた2本の接線について
2つの接線の長さは等しい。



例 右の図において，D，E，F は △ABC とその内接円の接点である。このとき，CD の長さを求める。



BF =　　 = 5

AF = AB − BF = 7 − 5 = 2

AE =　　 = 2

CE = AC − AE = 6 − 2 = 4

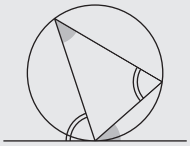
よって CD =　　 = 4

要点② 接線と弦の作る角の定理

円の接線と弦の作る角について，次のことが成り立つ。

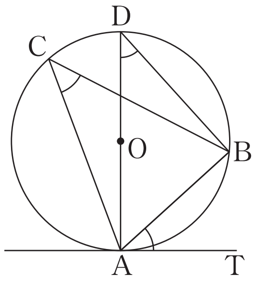
接線と弦の作る角の定理

円の接線とその接点を通る弦の作る角は，
その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



（証明）

右図において，∠BAT が鋭角の場合を考える。



直径 AD を引くと，∠DAT＝　　であるから

　　∠BAT＝90°−∠BAD

また，AD は直径より ∠ABD＝　　であるから

　　∠ADB＝180°−∠ABD−∠BAD

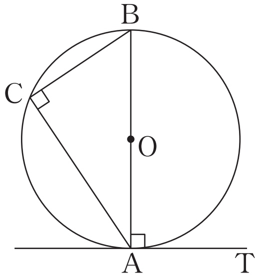
　　　　＝180°−90°−∠BAD

　　　　＝90°−∠BAD

よって ∠BAT＝∠ADB

同じ弧に対する円周角は等しいから ∠ADB＝∠ACB

したがって ∠BAT＝∠ACB



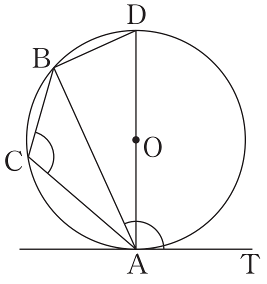
∠BAT が直角の場合について

　　∠BAT＝90°

AB は直径より ∠ACB＝90°

よって ∠BAT＝∠ACB

∠BAT が鈍角の場合について



直径 AD を引くと，∠DAT＝90° であるから

　　∠BAT＝90°＋∠BAD

また，AD は直径より ∠ABD＝90° であるから

　　∠ADB＝180°−∠ABD−∠BAD

　　　　＝180°−90°−∠BAD

　　　　＝90°−∠BAD

円に内接する四角形の性質より

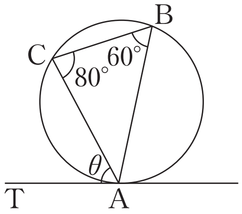
　　∠ACB＝

　　　　＝180°−(90°−∠BAD)

　　　　＝90°＋∠BAD

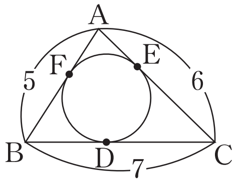
よって ∠BAT＝∠ACB

例　右の図において，直線 AT は円 O の接線，点 A は接点であるとき



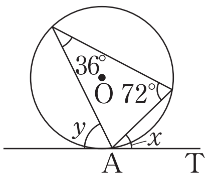
　　$\theta=$

2 (1) 右図のように，円が △ABC の各辺に接していて D，E，F は接点である。AB＝5，BC＝7，CA＝6 のとき，AF の長さを求めよ。

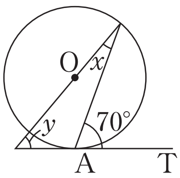


(2) 下の図において，直線 AT は円 O の接線，点 A は接点である。x，y を求めよ。

(i)



(ii)



Point Pickup

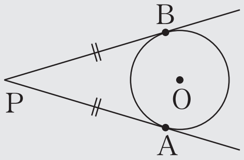
接線の長さ

右図において PA＝PB

・ある円に 2 本 (以上) の接線が引いてあるとき

・円が内接している三角形の辺の長さを求めるとき

に利用。

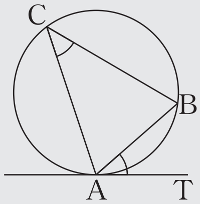


接線と弦の作る角の定理（接弦定理）

右図において ∠BAT＝∠ACB

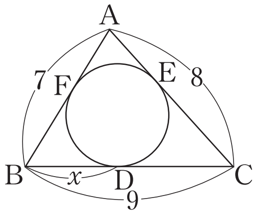
円の接線と，その接点を 1 つの頂点とする

三角形があるときに利用。



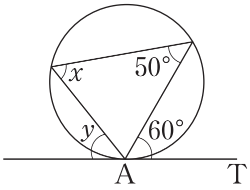
第 8 講　PART2 確認問題

1　次の図で，点 D，E，F は内接円の接点である。



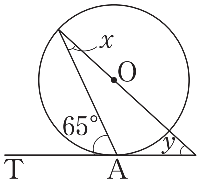
このとき，x＝ ア である。

2　次の図で，AT は円の接線で，A はその接点である。



このとき，x＝ イウ °，y＝ エオ ° である。

3　次の図で，AT は円の接線で，A はその接点である。



O は円の中心

このとき，x＝ カキ °，y＝ クケ ° である。

PART3 方べきの定理

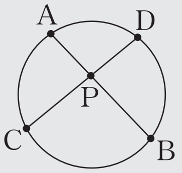
要点① 相似な三角形と方べきの定理

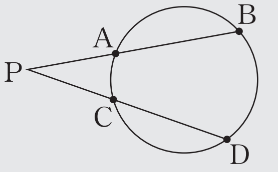
円と2直線について，次の定理が成り立つ。

方べきの定理(1)

点Pを通る2直線が，円とそれぞれ2点A，Bと2点C，Dで交わるとき

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



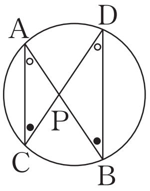


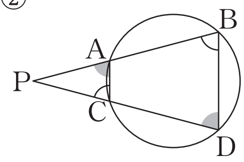
(証明)

右図①，②において △PAC ∽ △PDB より

$$PA : PD = PC : PB$$

よって $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

①


②


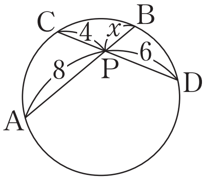
PA・PB および PC・PD は，点Pから直線と円の2つの交点までの長さの積(これを「方べき」という)であり，ある円に関して方べきの値は直線の引き方によらず一定である。

例 右の図において，方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\cdot \quad = \quad \cdot$$

$$x = 3$$

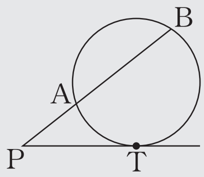


また，次の定理も成り立つ。

方べきの定理(2)

点Pを通る2直線のうち，一方が円Oと2点A，Bで交わり，もう一方が円Oと点Tで接するとき

$$PA \cdot PB = PT^2$$

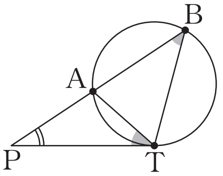


（証明）

右図において △PTA ∽ △PBT より

$$PA : PT = PT : PB$$

よって $PA \cdot PB = PT^2$



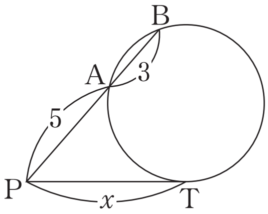
例　右の図において，方べきの定理より

$$PA \cdot PB = PT^2$$

$$\cdot \qquad =$$

$$x^2 = 40$$

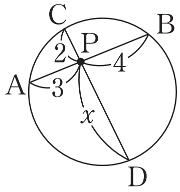
$x > 0$ より $x = 2\sqrt{10}$



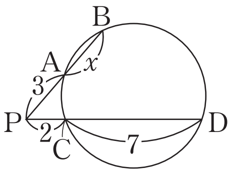
※方べきの定理(1)の逆，および方べきの定理(2)の逆についても成り立つことが知られている。

3　次の図において，x を求めよ。ただし，点Tは接点とする。

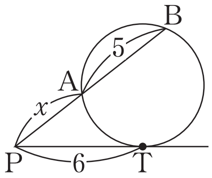
(1)



(2)



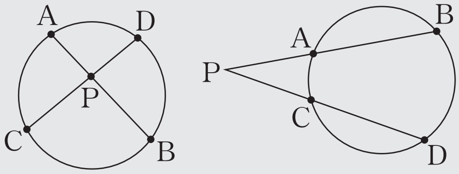
(3)



Point Pickup

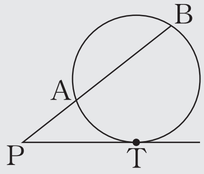
方べきの定理

円と2点で交わる2直線



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

円の接線および円と2点で交わる直線

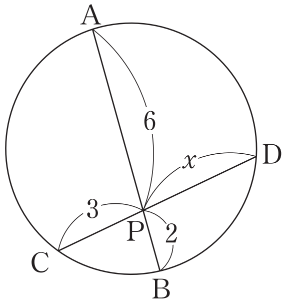


$PA \cdot PB = PT^2$

第 8 講　PART3 確認問題

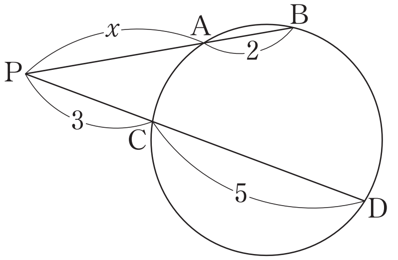
次の図で，x の値を求めよ。

1



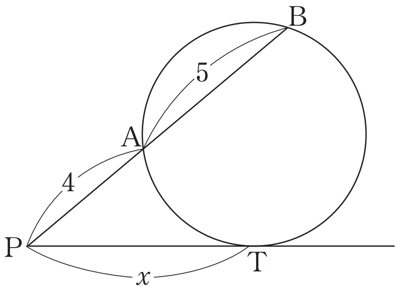
$x=$ ア

2



$x=$ イ

3



点 T は接点

$x=$ ウ

PART4 2つの円の位置関係と共通接線

要点① 2つの円の位置関係

2つの円の位置関係は，それぞれの円の半径と中心間の距離で決まる。

円O，円O′の半径をそれぞれr，r'（$r>r'$），中心間の距離をdとすると，2つの円O，O′の位置関係は，右の[1]～[5]の5通りの場合がある。

[2]，[4]のように，2つの円がただ1つの共有点をもつとき，この2つの円は「　　　　　」といい，その共有点を「　　　」という。2つの円が接するとき，接点は2つの円の中心を通る直線上にある。

また，[1]～[5]のそれぞれにおいて，r，r'，dの関係は以下のようになる。

[1]　$d>r+r'$

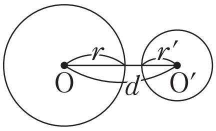
[2]　　　　　　（中心間の距離が　　　　　　に等しい）

[3]　$r-r'<d<r+r'$

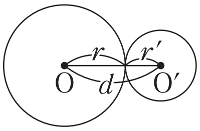
[4]　　　　　　（中心間の距離が　　　　　　に等しい）

[5]　$d<r-r'$

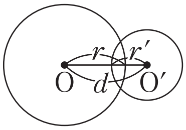
[1] 互いに外部にある



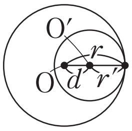
[2]　　　する



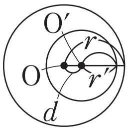
[3]2点で交わる



[4]　　　する



[5] 一方が他方の内部にある

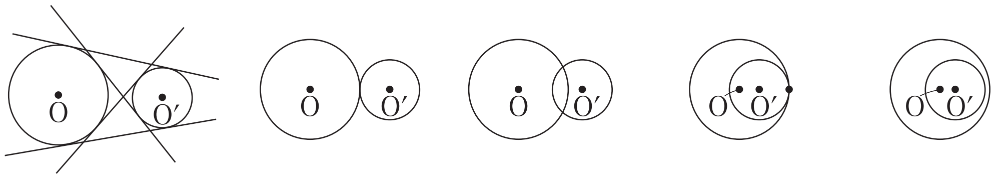


要点② 2つの円の共通接線

1つの直線が，2つの円の両方に接するとき，この直線を2つの円の「　　　　　」という。

2つの円の共通接線の本数は，2つの円の位置関係によって次のようになる。

[1] 互いに外部にある　[2] 外接する　[3] 2点で交わる　[4] 内接する　[5] 一方が他方の内部にある

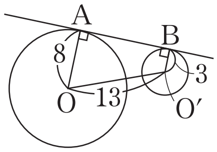


共通接線 4本　共通接線　本　共通接線　本　共通接線　本　共通接線　本

[MEMO]

4 (1) 2円O, O′ の半径をそれぞれ3, 6, 中心間の距離を9とする。2円O, O′ の位置関係と, 共通接線の本数を答えよ。

(2) 右の図で，直線ABは2つの円の共通接線で, A，Bは接点である。線分ABの長さを求めよ。



Point Pickup

2円の位置関係と共通接線の本数

2円の位置関係は，2円の半径と，中心間の距離によって，[1] 互いに外部にある [2] 外接する　[3] 2点で交わる　[4] 内接する　[5] 一方が他方の内部にある の5つの場合に分かれる。また共通接線の本数は，2円の位置関係によって決定する。

とくに2円が

外接する　$\Longleftrightarrow$　(中心間の距離)＝(半径の和)

内接する　$\Longleftrightarrow$　(中心間の距離)＝(半径の差)

第8講　PART4 確認問題

1　2円O，O′ の半径をそれぞれ3，4とし，中心間の距離を d とする。
d の値が次のときの2円の位置関係を，下の①～④のうちから選べ。

$d=7$ のとき，[ア]

$d=10$ のとき，[イ]

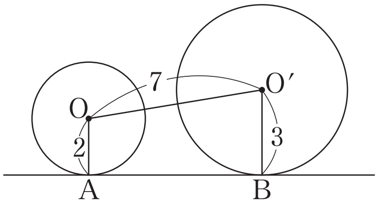
①　互いに外部にある　　②　外接する
③　内接する　　④　2点で交わる

2　2円O，O′ の半径をそれぞれ3，4とし，中心間の距離を d とする。
d の値が次のときの2円の共通接線の本数を求めよ。

$d=5$ のとき，[ウ]本

$d=8$ のとき，[エ]本

3　次の図で，直線ABは2つの円O，O′ の共通接線で，A，Bは接点である。



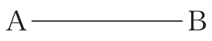
このとき，AB＝[オ]$\sqrt{[カ]}$ である。

PART5 作図

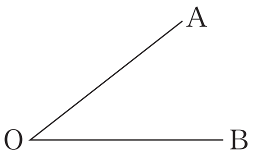
要点 ① 基本作図

「作図」… 与えられた 2 点を通る直線を引く定規と，与えられた 1 点を中心として，与えられた半径の円をかくコンパスだけを用いて，条件を満たす図形をかくこと。

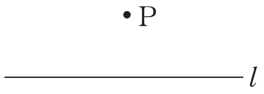
線分 AB の垂直二等分線



∠AOB の二等分線



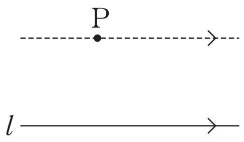
点 P を通る直線 l の垂線
（点 P が直線 l 上にないとき）



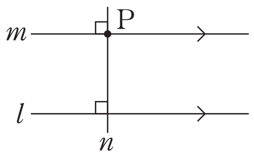
点 P を通る直線 l の垂線
（点 P が直線 l 上にあるとき）

要点 ② 平行線の作図

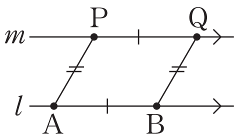
直線 l 上にない点 P を通り，l に平行な直線を作図する方法を考える。



2 つの平行線 l，m があるとき，直線 l と垂直な直線は直線 m とも垂直である。よって，点 P を通り直線 l に垂直な直線 n をひき，点 P を通り直線 n に垂直な直線 m をひけばよい。

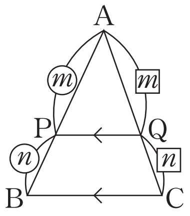


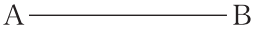
他にも，直線 l 上に適当な 2 点 A，B をとり，四角形 ABQP が平行四辺形になるような点 Q を作図で求める方法などがある。



[MEMO]

5　右図において，PQ // BC ならば AP：PB = AQ：QC である。
このことを利用して，線分 AB を 3：2 に内分する点を作図せよ。





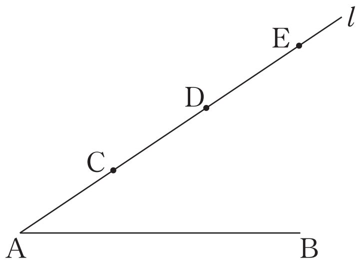
Point Pickup

線分 AB を m：n に内分する点の作図

点 A を通り，直線 AB と異なる直線 l を引き，l 上に AC：CD = m：n となるような点 C，D をこの順に作図でとる。
その後，点 C を通り直線 BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を E とすると，点 E が線分 AB を m：n に内分する点である。

第8講 PART5 確認問題

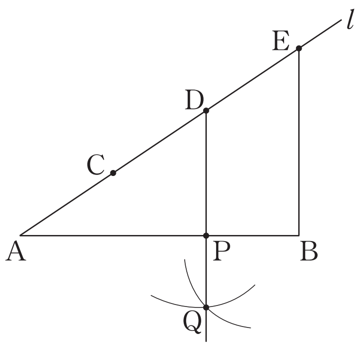
1 次の図は，与えられた線分 AB を 2：1 に内分する点 P を求めるため, 半直線 l 上に等間隔に 3 個の点 C, D, E をとったものである。



この図を利用して点 P を作図によって求めるとき，その方法を説明せよ。

ただし，次の ア ～ ウ は下の①～⑥のうちから選べ。

＜作図＞



＜作図の方法＞

(1) 線分 BE を引く。

(2) 点 ア を中心として，半径 BE の円をかく。

(3) 点 B を中心として，半径 イ の円をかき，(2)の円との交点を Q とする。

(4) 2 点 ウ，Q を通る直線を引き，線分 AB との交点を P とする。

① A　② B　③ C

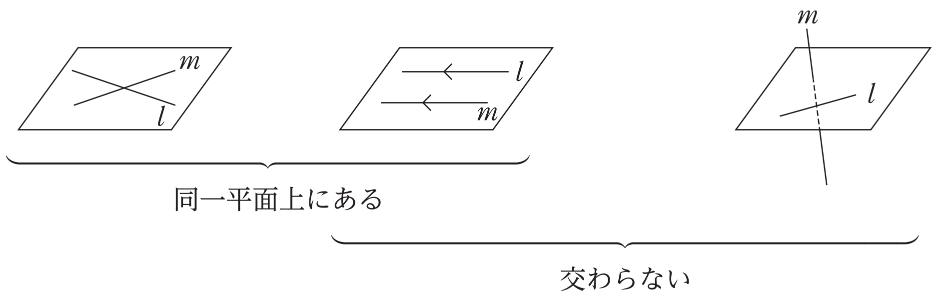
④ D　⑤ AC　⑥ BE

第 9 講　空間図形
PART1　直線と平面

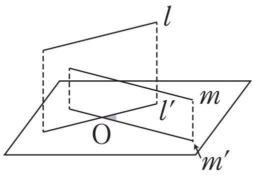
要点 ①　2直線の位置関係となす角

空間における異なる 2 直線 l，m の位置関係は，以下の 3 つ。

① 1 点で交わる　　② 平行である　　③ ねじれの位置にある



③の場合について，空間内の 1 点 O を通り l，m に平行な直線をそれぞれ l'，m' とすると，l'，m' は同一平面上にある。このとき，l'，m' のなす角を「　　　　　　　　」という。2 直線のなす角は 90° 以下の範囲で考える。

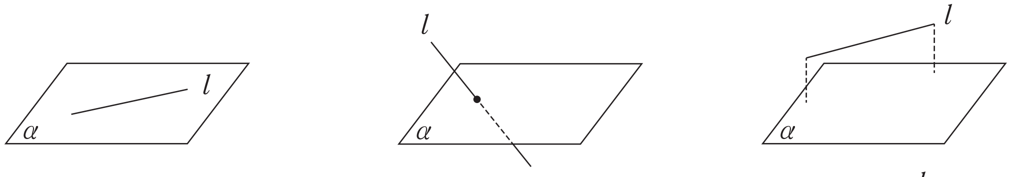


2 直線 l，m のなす角が 90° のとき，l と m は「　　　」であるといい，l　m と書く。l と m が垂直かつ交わるとき，l と m は「　　　」するという。

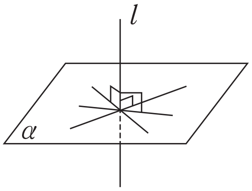
要点 ②　直線と平面の位置関係

空間における直線 l と平面 α の位置関係は，以下の 3 つ。

①　l が α 上にある　　②　1 点で交わる　　③　平行である（$l \parallel \alpha$）

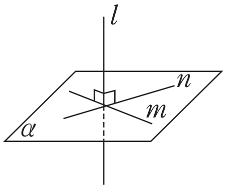


②の場合において，直線 l が平面 α 上のすべての直線に垂直であるとき，l は α に「　　　」である，または l は α に「　　　」するといい，l　α と書く。



一般に，次のことが成り立つ。

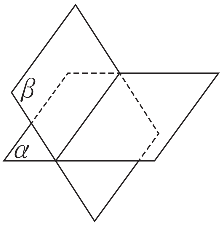
直線 l が，平面 α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば，
直線 l は平面 α に垂直である。



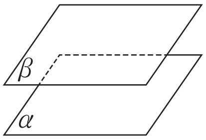
要点 ③　2平面の位置関係となす角

空間における異なる 2 平面 α，β の位置関係は，以下の 2 つ。

①　交わる

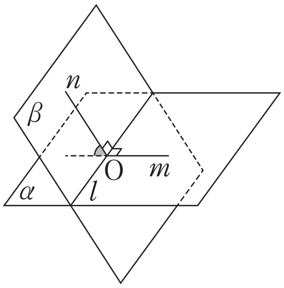


②　平行である($\alpha /\!/ \beta$)



2 平面が交わるとき，その共通部分は直線となる。
この直線を「　　　」という。

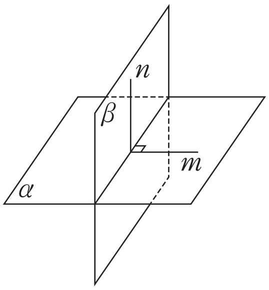
交わる 2 平面の交線 l 上に点 O をとり，平面 α，β 上にそれぞれ O を通る交線 l に垂直な直線 m，n を引く。この 2 直線 m，n のなす角を，「　　　　　　　　　　　　　　　　　」という。



2 平面 α，β のなす角が 90° のとき，α と β は「　　　」である，
または α と β は「　　　」するといい，α 　 β と書く。
2 平面の垂直について，次のことが成り立つ。

平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。

つまり，右図において $n \perp \alpha$ ならば，n を含む平面 β について，$\alpha \perp \beta$ である。



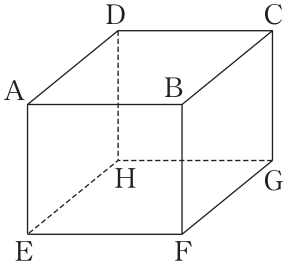
1 右図の立方体について，次の問いに答えよ。

(1) 辺 AB と垂直な辺をすべて答えよ。

(2) 2 直線 AB，EG のなす角 θ を求めよ。
ただし，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。

(3) 辺 AB と垂直な面をすべて答えよ。

(4) 面 AEHD と垂直な面をすべて答えよ。



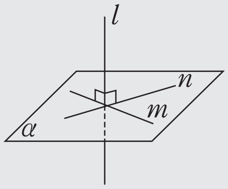
Point Pickup

空間における2直線のなす角

直線を平行移動させ，同一平面上でなす角を考える。垂直と直交の違いに注意。

直線と平面が垂直になるための条件

直線 l が，平面 α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば，
直線 l は平面 α に垂直である。

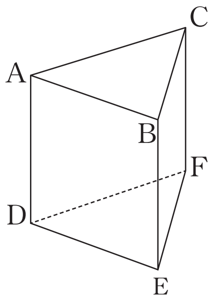


2平面が垂直

2 平面 α，β から交線に垂直に引いた 2 直線のなす角が $90°$ ならば，$\alpha \perp \beta$ である。
また，平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。

第 9 講　PART1 確認問題

次の図は，底面が正三角形である正三角柱である。



1　辺 AB と垂直な辺をすべて答えよ。 ア

ア は，次の①～④のうちから選べ。

① 辺 DE　　② 辺 CF

③ 辺 AD，BE　　④ 辺 AD，BE，CF

2　2 直線 AB，EF のなす角を θ とする。

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ の範囲では，$\theta =$ イウ $^\circ$ である。

3　辺 AD と垂直な面をすべて答えよ。 エ

エ は，次の①～④のうちから選べ。

① 面 ADEB　　② 面 BEFC

③ 面 ABC　　④ 面 ABC，DEF

4 面 ABC と垂直な面をすべて答えよ。[オ]。

[オ] は，次の①～④のうちから選べ。

① 面 DEF　　② 面 ADEB

③ 面 ADEB，ADFC，BEFC

④ ない

[MEMO]

PART2 多面体

要点① 多面体

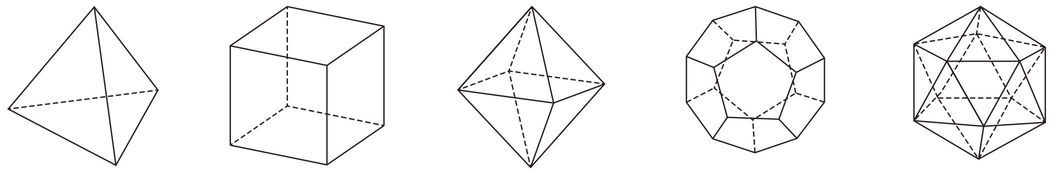
「多面体」… 平面だけで囲まれた立体。直方体，立方体，三角柱，四角錐など。

へこみのない多面体のうち，次の2つの条件を満たすものを「　　　　　」という。

[1] どの面もすべて合同な正多角形である

[2] どの頂点にも同じ数の面が集まっている

正多面体は，次の5種類しかないことが知られている。



正四面体　正六面体　正八面体　正十二面体　正二十面体

へこみのない多面体について，次のことが成り立つことが知られている。

オイラーの多面体定理

多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると

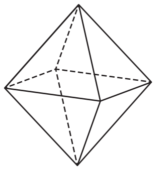
$$v-e+f=2$$

例 正八面体の

頂点の数は　$v=$

辺の数は　$e=$

面の数は　$f=$



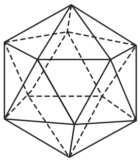
よって　$v-e+f=\quad-\quad+\quad=2$

[MEMO]

2　正六面体(立方体)の面の数は6である。また，1つの面の頂点の数は4である。
ここで，1つの頂点に集まる面の数は3であることから，正六面体の頂点の数は

$$\frac{4\times6}{3}=8$$

と求めることができる。



(1)　右図は正二十面体である。この図と，上の考え方を参考に，正二十面体の頂点の数を求めよ。

(2)　正二十面体について，オイラーの多面体定理

> 多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると
> $$v-e+f=2$$

を用いて，辺の数を求めよ。

Point Pickup

正多面体の頂点の数

正多面体は，以下の2つの条件を満たす。

[1]　どの面もすべて合同な正多角形である

[2]　どの頂点にも同じ数の面が集まっている

これを用いて，正多面体の頂点の数について

(1つの面の頂点の数)×(面の数)÷(1つの頂点に集まる面の数)

で求めることができる。

第 9 講　PART2 確認問題

正八面体について，次の問いに答えよ。

1　1つの面の形は [ア] であり，どの頂点にも [イ] 個の面が集まっている。

また，正多面体の頂点の数は，

(1つの面の頂点の数) × (面の数) ÷ $\left(\begin{array}{l}\text{1つの頂点に}\\\text{集まる面の数}\end{array}\right)$

で求めることができるので

頂点の数を v とすると，

$v =$ [ウ]

[ア] は，次の①，②から選べ。

①　正三角形　　　②　正方形

2　正八面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とするとき，v，e，f の間に $v-e+f=2$ の関係があることから，

$e =$ [エオ]，$f =$ [カ]

第10講　約数と倍数

PART1　約数と倍数

要点① 約数と倍数

整数 $\begin{cases} \text{正の整数（自然数）} & 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots \\ 0 & \\ \text{負の整数} & -1,\ -2,\ -3,\ \cdots\cdots \end{cases}$

2つの整数 a，b について，ある整数 k を用いて

$a = bk$

と表されるとき

a は b の「　　」（a は b で割り切れる）

b は a の「　　」

という。

例　$6 = 2\cdot3$ より，6は2の　　であり，2は6の　　である。

また，$a = bk$ のとき，$a =$ 　・　 であるから，b が a の約数のとき，$-b$ も a の約数である。

例　$10 = 1\cdot$　$= 2\cdot$　より，10の約数は　，　，　，　，　，　，　，　である。

これらをまとめて，±1，±2，±5，±10 のように書くことができる。

$a = 1\times a$ であるから，1と -1 はすべての整数の約数である。

また，$0 = a\times0$ であるから，0はすべての数の倍数であり，すべての数は0の約数である。

とくに，2の倍数を「　　」，2の倍数でない整数を「　　」という。

要点② 倍数の判定法

ある自然数が，どのような自然数の倍数かを判定する方法のうち，主なものは以下。

倍数の判定法(1)

2の倍数 …「　　　」の数が2の倍数(0，2，4，6，8)

5の倍数 …「　　　」の数が5の倍数(0，5)

4の倍数 …「　　　」が4の倍数

（説明）

$256=250+6=25\times10+6$ のように，ある整数は

（10 の倍数）＋（一の位の数）

と表すことができる。$10=2\cdot5$ であるから，10 の倍数は 2 の倍数である。

よって，ある整数の一の位の数が 2 の倍数であれば，その整数は 2 の倍数である。

同様に，10 の倍数は 5 の倍数であるから，ある整数の一の位の数が 5 の倍数であれば，

その整数は 5 の倍数である。

また，$4196=4100+96=41\times100+96$ のように，ある整数は

（100 の倍数）＋（下 2 桁の数）

と表すことができる。$100=4\cdot25$ であるから，100 の倍数は 4 の倍数である。

よって，ある整数の下 2 桁が 4 の倍数であれば，その整数は 4 の倍数である。

4196 は 4 の倍数である。

また，3 の倍数，9 の倍数には，以下のような判定法がある。

倍数の判定法⑵

3 の倍数 …「　　　　　　　　　　」が 3 の倍数

9 の倍数 …「　　　　　　　　　　」が 9 の倍数

（説明）

$$
\begin{aligned}
3859&=3\times1000+8\times100+5\times10+9\\
&=3\times(999+1)+8\times(99+1)+5\times(9+1)+9\\
&=3\times999+8\times99+5\times9+3+8+5+9\\
&=9(3\times111+8\times11+5\times1)+(3+8+5+9)
\end{aligned}
$$

のように，ある整数は

（9 の倍数）＋（各位の数の和）

と表すことができる。$9=3\cdot3$ より，9 の倍数は 3 の倍数である。

よって，ある整数の各位の数の和が 3 の倍数であれば，その整数は 3 の倍数であり，

ある整数の各位の数の和が 9 の倍数であれば，その整数は 9 の倍数である。

3859 は 3 の倍数ではない。

1 (1)(i)　24の正の約数をすべて求めよ。

(ii)　15の正の倍数を小さいものから5個求めよ。

(2)　5桁の自然数2854□が3の倍数かつ5の倍数であるとき，□に入る数を求めよ。

Point Pickup

約数と倍数

2つの整数 a，b について，$a = bk$ (k は整数) と表されるとき

a は b の倍数であり，b は a の約数である。

倍数の判定法

2の倍数 …「一の位」の数が2の倍数

5の倍数 …「一の位」の数が5の倍数

4の倍数 …「下2桁」が4の倍数

3の倍数 …「各位の数の和」が3の倍数

9の倍数 …「各位の数の和」が9の倍数

第10講 PART1 確認問題

1 77 の正の約数をすべて求めると，

1，[ア]，[イウ]，77

である。

2 25 の正の倍数を小さい方から 4 個求めると，

25，[エオ]，[カキ]，[クケコ]

である。

3 5 桁の整数 2345□ が 2 の倍数かつ 3 の倍数であるとき，□ に入る数字は [サ] である。

PART2 素因数分解と約数

要点① 素数と素因数分解

「素数」… 1 とその数自身以外に正の約数をもたない 2 以上の自然数

例 素数は小さい方から

「合成数」… 2 以上の自然数のうち，素数でない数

例 合成数は小さい方から

※ 1 は素数でも合成数でもない。

「因数」… ある整数がいくつかの整数の積で表されるとき，積を作る 1 つ 1 つの整数

「素因数」… 素数である因数

「素因数分解」… ある自然数を素数だけの積の形で表すこと

例 12 を素因数分解する

12 を素数で次々に割っていくことにより

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline & 3 \end{array}$$

$$12=2^2\cdot 3$$

合成数は必ず素因数分解できる。またその結果は，積の順序を考えなければ

である。

例 $12n$ が平方数となる最小の自然数 n を求めたい。

平方数は，ある整数の 2 乗で表される数であり

$$100=10^2=(2\cdot 5)^2=2^2\cdot 5^2$$

のように，すべての素因数の個数が偶数個となる。

よって，$12n=2^2\cdot 3n$ が平方数となる最小の自然数 n は $n=3$

（このとき $12n=12\cdot 3=2^2\cdot 3^2=(2\cdot 3)^2=6^2$）

要点② 約数と素因数分解

$12=1\cdot 12=2\cdot 6=3\cdot 4$ より，12 の正の約数は　　　　　　　　　　の　個である。

この正の約数の個数を，素因数分解を用いて求めることができる。

$12=2^2\cdot 3$ より，12 の正の約数は

素因数 2 を最大　個　最小　個

素因数 3 を最大　個　最小　個

もつ数である。例えば

約数 6 は $2\ \cdot 3$　と表され，素因数 2 を　個，素因数 3 を　個もつ数

約数 3 は $2\ \cdot 3$　と表され，素因数 2 を　個，素因数 3 を　個もつ数

である(自然数 a に対して，$a^0=$　とする)。

つまり，12 の正の約数は

素因数 2 を 0 個～ 2 個，素因数 3 を 0 個～ 1 個

掛けることで得られ，その個数は　×　$=6$ (個)である。

このことより，次のことがいえる。

正の約数の個数

自然数 N が $N=p^a q^b r^c\cdots\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は

$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$

2 (1) $\sqrt{1400n}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) 150 の正の約数の個数を求めよ。

Point Pickup

ある自然数 N が平方数

ある自然数 N が平方数(ある整数の 2 乗で表される数)になるのは，N のすべての素因数の個数が偶数個のときである。

自然数 N の約数の個数

ある自然数 N が $N=p^a q^b r^c \cdots\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は

$$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$$

第10講　PART2 確認問題

1　$\sqrt{60n}$ が自然数であるとき，最小の自然数 n は，

$n=$ アイ である。

2　84 の正の約数は，全部で ウエ 個ある。

PART3 最大公約数と最小公倍数

要点① 最大公約数と最小公倍数

2つ以上の整数について

「最大公約数」… 共通する約数(公約数)のうち最大のもの

「最小公倍数」… 共通する倍数(公倍数)のうち正で最小のもの

例 12と30について

12の正の約数は1，2，3，4，6，12

30の正の約数は1，2，3，5，6，10，15，30

よって，最大公約数は

12の正の倍数は12，24，36，48，60，……

30の正の倍数は30，60，90，120，150，……

よって，最小公倍数は

12，30をそれぞれ素因数分解すると

$$12 = 2^2 \cdot 3$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$$

である。

12と30の最大公約数は $6 = 2 \cdot 3$ であり，これは12と30に共通な素因数を，共通にもつ個数分だけ掛け合わせたものである。

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$30 = 2 \quad \cdot 3 \quad \cdot 5$

12と30の最小公倍数は $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ であり，これは12と30のすべての素因数を，2数のもつ個数のうち多い方の分だけ掛け合わせたものである。

$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$

$30 = 2 \quad \cdot 3 \quad \cdot 5$

最大公約数と最小公倍数

ある2数をそれぞれ素因数分解したとき

2数の最大公約数 $\Longrightarrow$ 2数に共通な素因数で，指数が最小のものの積

2数の最小公倍数 $\Longrightarrow$ 2数のすべての素因数で，指数が最大のものの積

このことは，3数以上のときも成り立つ。

要点② 互いに素

2つの整数 a，b について，共通な素因数がないとき，a と b は「　　　　　」であるという。
このとき，2つの整数 a，b の最大公約数は　である。

例　9と10について

$9=3^2$

$10=2\cdot5$

よって，9と10の最大公約数は　であり，9と10は互いに素である。

互いに素である2つの整数について，以下のことがいえる。

> k を整数とする。
> a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

例　k を整数とする。
$2k$ が3の倍数のとき，2と3は互いに素より，k は3の倍数である。

3 ⑴　3 つの整数 28，70，154 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

⑵　2 つの整数 130，231 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

Point Pickup

最大公約数と最小公倍数

最大公約数，最小公倍数を求めたい数をそれぞれ素因数分解し

最大公約数 $\Longrightarrow$ 共通な素因数で，指数が最小のもの

最小公倍数 $\Longrightarrow$ すべての素因数で，指数が最大のもの

を選び，その積を求める。

互いに素

2 つの整数 a，b について，共通な素因数がないとき，a と b は互いに素であるという。

第10講 PART3 確認問題

1 3つの整数36，54，90の最大公約数は アイ であり，最小公倍数は ウエオ である。

2 2つの整数63，110の最大公約数は カ であり，最小公倍数は キクケコ である。

PART4 余りによる分類

要点① 除法の原理

23を5で割ると，商は4で余りは3である。このことを，等式を用いて表すと

$23=$

となる。この余り3は，割る数5よりも小さい数である。

整数の割り算について，次のことが成り立つ。

除法の原理

整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると

$$a=bq+r,\quad 0\leqq r<b$$

であり，これを満たす整数 q，r がただ1通りに定まる。

$r=0$ のとき，a は b で「割り切れる」

$r\neq 0$ のとき，a は b で「割り切れない」

という。

例　$36=7\cdot5+1$ より

36を7で割ったときの商は ，余りは であり， ≦ ＜ である。

$-60=8\cdot(\quad)+$ 　より

-60 を8で割ったときの商は ，余りは であり， ≦ ＜ である。

要点② 余りによる整数の分類

整数を2で割ったときの余りは 　のいずれかである。

よって，すべての整数は，k を整数として $2k$，$2k+1$ の 通りの形に分類される。

$2k$ を偶数，$2k+1$ を奇数という。

整数を3で割ったときの余りは 　のいずれかである。

よって，すべての整数は，k を整数として $3k$，$3k+1$, $3k+2$ の 通りの形に分類される。

一般に，次のことがいえる。

すべての整数は，正の整数 m で割ったときの余り 0，1，……，$m-1$ によって

$$mk,\ mk+1,\ mk+2,\ \cdots\cdots,\ mk+(m-1)\ (k\ は整数)$$

のいずれかの形で表される。

例 2つの整数 a，b を7で割った余りがそれぞれ1，4であるとき，a，b は整数 k，l を用いて

$a=$　　　，$b=$

と表される。

このとき，$a+b$，ab をそれぞれ7で割った余りを求める。

$$\begin{aligned} a+b &= (7k+\ \ )+(7l+\ \ ) \\ &= \ \ k+\ \ l+\ \ + \\ &= \ \ (k+l)+(\qquad) \\ &= \ \ (k+l)+ \end{aligned}$$

よって，$a+b$ を7で割ったときの余りは

$$\begin{aligned} ab &= (7k+\ \ )(7l+\ \ ) \\ &= \quad kl+\ \ \cdot 4k+\ \ \cdot l+ \\ &= \ \ (7kl+4k+l)+ \\ &= \ \ (7kl+4k+l)+ \end{aligned}$$

よって，ab を7で割ったときの余りは

4 2つの整数a, bを5で割ったときの余りをそれぞれ2, 3とする。このとき, 次の数を5で割ったときの余りを求めよ。

(1)　$a+b$　　(2)　ab

Point Pickup

除法の原理

整数aを，正の整数bで割ったときの商をq，余りをrとすると

$$a=bq+r,\quad 0\leqq r<b$$

を満たす整数q，rがただ1通りに定まる。

余りによる整数の分類

kを整数とするとき，すべての整数は

2で割ったときの余りで$2k$，$2k+1$の2通りに

3で割ったときの余りで$3k$，$3k+1$，$3k+2$の3通りに

正の整数mで割ったときの余りでmk，$mk+1$，$mk+2$，……，$mk+(m-1)$のm通りに

それぞれ分類することができる。

第10講　PART4 確認問題

2つの整数 a, b を8で割ったときの余りをそれぞれ2, 5とする。

1　$a+b$ を8で割ったときの余りは [ア] である。

2　ab を8で割ったときの余りは [イ] である。

第11講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　ユークリッドの互除法

要点①　割り算の余りと最大公約数

187と119の最大公約数は17である。この最大公約数を，除法の原理を用いて求めることを考える。

187を119で割ったときの商は1，余りは68である。よって，除法の原理より

$$187=119\cdot1+68 \quad \cdots\cdots ①$$

と表される。この式を変形すると，次の式が得られる。

$$68=187-119\cdot1 \quad \cdots\cdots ②$$

ここで，$187=11\cdot17$，$119=7\cdot17$ であることから，②より

$$68=11\cdot17-7\cdot17\cdot1=17(11-7\cdot1)$$

である。この式から，17は68の約数であることがわかる。

よって，187と119の公約数17は，119と68の公約数でもある。

つまり，187と119の公約数を a とすると，a は119と68の公約数でもある。

また，119と68の公約数を b とすると，①より b は187の約数であることがわかる。

つまり，b は187と119の公約数でもある。

以上より，187と119の公約数と，119と68の公約数は，集合として一致する。

したがって，187と119の最大公約数と，119と68の最大公約数は一致する。

一般に，2つの自然数 a，b の最大公約数について，次のことが成り立つ。

割り算の余りと最大公約数

自然数 a を自然数 b で割ったときの余りを r とすると，

a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

要点② ユークリッドの互除法

割り算の余りと最大公約数の関係を用いた以下の①と②の手順により，2つの自然数 a と b $(a>b)$ の最大公約数を求める方法を「ユークリッドの　　　　」(または単に「　　　　」)という。

① a を b で割ったときの余りを r とする。

② $r>0$ のとき

a と b の最大公約数は，b と r の最大公約数に等しい。

よって，a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。

$r=0$ のとき

求める最大公約数は b である。

例 187と119の最大公約数をユークリッドの互除法を用いて求める。

$187=119\cdot1+68$ …… (187と119の最大公約数)＝(　と　の最大公約数)

$119=68\cdot1+51$ …… (119と68の最大公約数)＝(　と　の最大公約数)

$68=51\cdot1+17$ …… (68と51の最大公約数)＝(　と　の最大公約数)

$51=17\cdot3+0$ …… (51と17の最大公約数)＝

したがって，187と119の最大公約数は17

1 次の2つの自然数の最大公約数を，ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

(1)　1008，810　　(2)　1057，481

Point Pickup

互除法を用いて最大公約数を求める

2つの自然数 a，$b(a>b)$ について

①　a を b で割ったときの余りを r とする。

②　$r>0$ のとき　a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。

　　$r=0$ のとき　b が a と b の最大公約数である。

第11講 PART1 確認問題

次の 2 つの自然数の最大公約数を，互除法を用いて求めよ。

1 420，192

$$420=192\times2+36$$

$$192=\boxed{アイ}\times5+\boxed{ウエ}$$

$$\boxed{オカ}=\boxed{キク}\times3$$

よって，420 と 192 の最大公約数は $\boxed{ケコ}$ である。

2 1041，508

$$1041=508\times2+25$$

$$508=\boxed{サシ}\times20+\boxed{ス}$$

$$\boxed{セソ}=\boxed{タ}\times3+\boxed{チ}$$

よって，1041 と 508 の最大公約数は $\boxed{ツ}$ である。

PART2 1 次不定方程式

要点 ① 1 次不定方程式

a, b, c は整数で, $a \neq 0$, $b \neq 0$ とするとき, x, y の 1 次方程式

$ax+by=c$

を成り立たせる実数 x, y の組は無数に存在する。この方程式のことを「(2 元) 1 次不定方程式」という。また, この方程式を成り立たせる整数 x, y の組を, この方程式の「　　　　　」という。

例　方程式 $4x-3y=0$ の整数解を求める。

この方程式を変形すると $4x=3y$ …… ①

4, 3 は　　　　　　より, x は　の倍数である。

よって, $x=$　　(k は整数) と表される。

このとき, ①より $4\cdot 3k=3y$ よって, $y=$　　と表される。

したがって, 求める整数解は $x=3k$, $y=4k$ (k は整数)

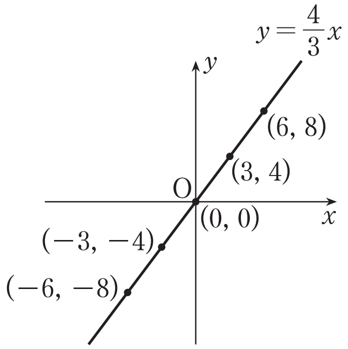
この整数解において

$k=0$ のとき $(x, y)=(0, 0)$

$k=1$ のとき $(x, y)=(3, 4)$

である。整数 k は無数に存在するので , 方程式

$4x-3y=0$ の整数解も無数に存在する。



要点 ② $ax+by=1$ の整数解

1 次不定方程式 $ax+by=1$ (a, b は互いに素) について , この方程式を満たす整数 x, y のうち 1 組(これを「特殊解」という)を見つけることで , すべての解(「一般解」という)を求めることができる。

例　方程式 $4x-3y=1$ …… ①の整数解を求める。

この方程式の整数解の 1 つは $x=1$, $y=$

よって $4\cdot 1-3\cdot 1=1$ …… ②

①－②より　$4(x-1)-3(y-1)=$　　　　つまり $4(x-1)=3(y-1)$ …… ③

4 と 3 は　　　　　　より, $x-1$ は　の倍数である。

よって, $x-1=$　　(k は整数)と表される。

このとき, ③より $4\cdot 3k=3(y-1)$　　　$y-1=4k$

したがって , 求める整数解は　$x=$　　　, $y=$　　　(k は整数)

[MEMO]

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$3x-5y=0$

(2)　$8x+5y=1$

Point Pickup

互いに素である２つの整数と倍数

k を整数とする。

a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

１次不定方程式 $ax+by=1$（a，b は互いに素）の整数解

方程式を満たす１組の解（特殊解）を見つける。

その解を方程式に代入した式と，方程式との差をとる。

第11講　PART2 確認問題

1　方程式 $2x-7y=0$ の整数解は，

$$x=\boxed{\text{ア}}k,\quad y=\boxed{\text{イ}}k\quad (k \text{ は整数})$$

と表される。

2　方程式 $3x-5y=1$　……①の整数解を求める。

この方程式の整数解の 1 つは，$x=2$，$y=\boxed{\text{ウ}}$ であるから，

$$3\cdot2-5\cdot\boxed{\text{ウ}}=1\quad ……②$$

①－②より，

$$3(x-2)-5\left(y-\boxed{\text{ウ}}\right)=0$$

3 と 5 は互いに素より，

$x-2$ は $\boxed{\text{エ}}$ の倍数であるから，

$$x-2=\boxed{\text{エ}}k\quad (k \text{ は整数})$$

と表される。

よって，求める整数解は，

$$x=\boxed{\text{エ}}k+2,\quad y=\boxed{\text{オ}}k+\boxed{\text{カ}}\quad (k \text{ は整数})$$

である。

PART3 １次不定方程式とユークリッドの互除法

要点① １次不定方程式の整数解と互除法

35 と 29 の最大公約数を互除法で求めると

$35=29\cdot1+$ ……①

$=\ \cdot4+$ ……②

$=\ \cdot1+$ ……③

$=\ \cdot5+0$ ……④

よって，35 と 29 の最大公約数は 1 であり，35 と 29 は互いに素である。

ここで，①～③を，それぞれの式における余りに注目して変形すると

③より　$1=6-5\cdot1$ ……③′

②より　$5=$ ……②′

①より　……①′

③′ に ②′ を代入して整理し，さらに ①′ を代入して整理すると

$$
\begin{aligned}
1&=6-5\cdot1\\
&=6-(29-6\cdot4)\cdot1\\
&=6-29\cdot1+6\cdot4\\
&=6\cdot5-29\cdot1\\
&=(35-29\cdot1)\cdot5-29\cdot1\\
&=35\cdot5-29\cdot5-29\cdot1\\
&=35\cdot5+29\cdot(-6)
\end{aligned}
$$

つまり，$35\cdot5+29\cdot(-6)=1$ と変形することができる。

これは，方程式 $35x+29y=1$ の解の 1 つが $x=5$，$y=-6$ であることを表している。

よって，1 次不定方程式 $35x+29y=1$ の整数解の 1 つ(特殊解)は，上記のように 35 と 29 に互除法を用いることで求めることができる。

一般に，1 次不定方程式 $ax+by=c$ (a，b は互いに素) の整数解の 1 つは，a と b に互除法を用いることで求めることができる。

[MEMO]

3 次の方程式の整数解の１つを，互除法を用いて求めよ。

$$42x+29y=1$$

Point Pickup

１次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解と互除法

１次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解の１つ(特殊解)が見つからないときは，a と b に互除法を用いる方法がある。

第11講 PART3 確認問題

1 方程式 $58x-17y=1$ の整数解の1つを，□内の計算式を利用し，互除法を用いて求めよ。

$58=17\times3+7$

$17=7\times2+3$

⋮

整数解：$x=$ ア ，$y=$ イウ

PART4 整数の性質の活用

要点① n 進法

ある数を表すとき，日常，位取りの基礎を 10 とする「10 進法」を用いている。10 進法で表される数（これを「10 進数」という）においては，各位に 0 から 9 までの　　個の数字を用いて，10 で位が 1 つ上がるように表し，位として右から 1，10，10^2，……を用いる。

例　10 進法で 1234 と表された数は　$1\cdot10\quad+2\cdot10\quad+3\cdot10\quad+4\cdot10^0$　を意味する。

位取りの基礎を 2 とする数の表し方を，「　　　　　」という。2 進法では，各位に 0，1 の　個の数字を用いて，2 で位が 1 つ上がるように表し，位として右から 1，　，　，……を用いる。

例　2 進法で 10101 と表された数は　10 進法では，$1\cdot2\quad+0\cdot2\quad+1\cdot2\quad+0\cdot2\quad+1\cdot2^0$　を意味する。

一般に，位取りの基礎を $n\,(n\geqq2)$ として数を表す方法を「　　　　　」，n 進法で表された数を「　　　　　」という。n 進数は，その数の右下に $_{(n)}$ のようにカッコをつけて表す。10 進数では普通 $_{(10)}$ を省略する。

例　2 進法で 10101 を表す数は $10101_{(2)}$

[MEMO]

4 (1) 2 進数 $110010_{(2)}$ を 10 進法で表せ。

(2) 10 進数 87 を 2 進法で表せ。

Point Pickup

n 進法→ 10 進法

n 進数の各位について

(位の数字) × (位の表す数)

の形に直し，その和を求める。

10 進法→ n 進法

① 10 進法で表された数を n で割り，商と余りを求める。

② ①の商を n で割り，その商と余りを求める。以下，商が 0 になるまで繰り返す。

③ ②で出てきた余りを逆順に並べ，最後に①の余りを並べる。

第11講 PART4 確認問題

1 2進法で表した $101101_{(2)}$ を10進法で表すと，[アイ] である。

2 10進法で表した90を2進法で表すと，[ウ] である。

[ウ] は，次の①～④から選べ。

① $101010_{(2)}$　　② $101110_{(2)}$

③ $1011010_{(2)}$　　④ $1101100_{(2)}$

第 1 講　場合の数

PART1 集合の要素の個数

1　1 から 100 までの整数のうち，次のような数の個数を求めよ。

(1)　5 の倍数

(2)　5 の倍数でない数

(3)　5 の倍数かつ 7 の倍数

(4)　5 の倍数または 7 の倍数

(5)　5 の倍数であるが，7 の倍数でない数

[解答]

1 から 100 までの整数全体の集合を U とし，U の部分集合のうち，5 の倍数全体の集合を A，7 の倍数全体の集合を B とすると

$$A=\{5\cdot1,\ 5\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 5\cdot20\}$$

$$B=\{7\cdot1,\ 7\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 7\cdot14\}$$

より，$n(A)=20$，$n(B)=14$

(1)　$n(A)=20$ より　　20 個

(2)　$n(\overline{A})=n(U)-n(A)=100-20=80$ より　　80 個

(3)　5 の倍数かつ 7 の倍数は，5 と 7 の最小公倍数 35 の倍数である。

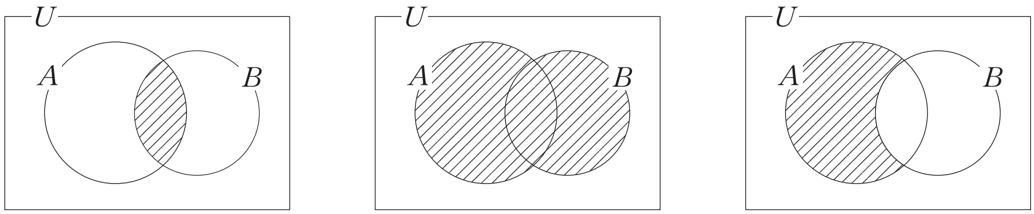
よって，$A\cap B=\{35,\ 70\}$ より，$n(A\cap B)=2$　　よって 2 個

(4)　$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=20+14-2=32$　　よって 32 個

(5)　$n(A\cap\overline{B})=n(A)-n(A\cap B)=20-2=18$　　よって 18 個

(参考図)

(3)　　(4)　　(5)



PART2 場合の数

2 (1) 大中小3つのさいころを同時に投げたとき，目の和が6になる場合は何通りあるか。

(2) A，Bの2人がじゃんけんをし，どちらかが3回勝つまでじゃんけんを続けるとする。1回目にAが勝つとき，勝敗のパターンは何通りあるか。

[解答]

(1) 目の和が6になるときの大，中，小3つのさいころの目の樹形図は下図。

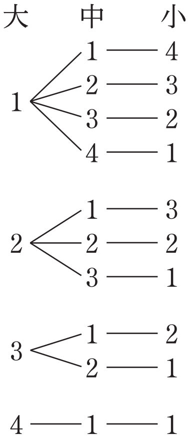
よって10通り

(2) じゃんけんで勝った方をA，Bで表すと，1回目にAが勝つときの樹形図は下図。

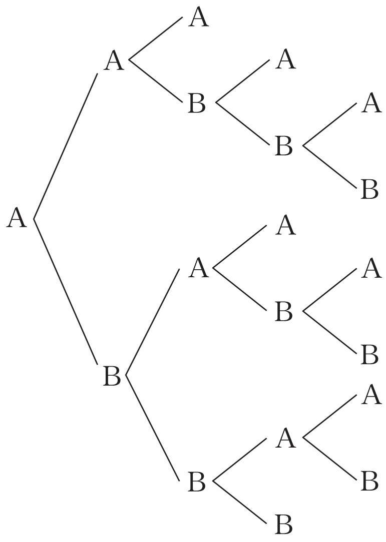
よって10通り

（樹形図）

(1)



(2)



PART3 和の法則

3 大小 2 つのさいころを投げるとき，目の和が次のようになる場合の数を求めよ。

(1) 4 または 5　　　(2) 4 の倍数

[解答]

大小 2 つのさいころの目を(大きいさいころの目，小さいさいころの目)で表す。

(1) 目の和が 4 になるのは (1，3)，(2，2)，(3，1) の 3 通り

目の和が 5 になるのは (1，4)，(2，3)，(3，2)，(4，1) の 4 通り

これらは同時には起こらないので，求める場合の数は $3+4=7$(通り)

(2) 目の和が 4 の倍数になるのは，目の和が 4 または 8 または 12 になる場合である。

目の和が 4 になるのは(1)より 3 通り

目の和が 8 になるのは (2，6)，(3，5)，(4，4)，(5，3)，(6，2) の 5 通り

目の和が 12 になるのは (6，6) の 1 通り

これらは同時には起こらないので，求める場合の数は $3+5+1=9$(通り)

PART4 積の法則

4 (1) 1 個のさいころを 2 回投げたとき，1 回目に偶数の目，2 回目に奇数の目が出る場合は何通りあるか。

(2) 2 種類の前菜，4 種類のメインディッシュ，3 種類のデザートからそれぞれ 1 種類ずつ選ぶとき，選び方は何通りあるか。

[解答]

(1) 1 回目に偶数の目が出るのは，2，4，6 の 3 通り
そのどの場合においても，2 回目に奇数の目が出るのは 1，3，5 の 3 通り
よって求める場合の数は $3\times3=9$(通り)

(2) 前菜の選び方が 2 通り，そのどの場合においても，メインディッシュの選び方が 4 通り，さらにそのどの場合においても，デザートの選び方が 3 通りある。
よって求める場合の数は $2\times4\times3=24$(通り)

第 2 講　順列

PART1　順列

1　(1)　次の値を求めよ。

(i)　${}_4P_3$　(ii)　${}_7P_1$　(iii)　$3!$　(iv)　$5!$

(2)　次のものの総数を求めよ。

(i)　5 人の生徒から 2 人を選んで 1 列に並べるときの並べ方。

(ii)　NUMBERS という単語の 7 個の文字を全部使ってできる文字列。

[解答]

(1)(i)　${}_4P_3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$　(ii)　${}_7P_1 = 7$

(iii)　$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$　(iv)　$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

(2)(i)　${}_5P_2 = 5 \cdot 4 = 20$（通り）　(ii)　$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$（通り）

PART2 順列の利用

2 (1) 1 から 7 までの数字が 1 つずつ書かれた 7 枚のカードのうち，3 枚を選んで A，B，C の 3 人に 1 枚ずつ配るとき，配り方の総数は何通りあるか。

(2) 5 個の数字 1，2，3，4，5 の中から異なる 4 個を使ってできる 4 桁の奇数は何個あるか。

(3) 男子 3 人，女子 2 人が 1 列に並ぶとき，次のような並び方は何通りあるか。

(i) 両端が女子である　　(ii) 男子 3 人が隣り合う

[解答]

(1) 7 枚のカードから 3 枚選んで 1 列に並べる順列の総数に等しい。

よって　${}_7P_3 = 7\cdot6\cdot5 = 210$（通り）

(2) ある整数が奇数であるとき，その一の位が奇数である。

よって，一の位は 1，3，5 の 3 通り

そのいずれの場合についても，千，百，十の位の選び方は，残り 4 個の数字から 3 個取って 1 列に並べる順列の総数に等しく ${}_4P_3$ 通り

よって，求める個数は，積の法則により

$$3\times{}_4P_3 = 3\times4\cdot3\cdot2 = 72\text{（個）}$$

(3)(i) 両端の女子 2 人の並び方は 2! 通り

そのいずれの場合についても，残り 3 人の並び方は 3! 通り

よって $2!\times3! = 2\cdot1\times3\cdot2\cdot1 = 12$（通り）

(ii) 隣り合う男子 3 人を 1 人とみなすと，並び方の総数は 3 人が並ぶ順列に等しく，3! 通りである。

そのいずれの場合についても，男子 3 人の並び方は 3! 通り。

よって，並び方の総数は，積の法則により

$$3!\times3! = 3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1 = 36\text{（通り）}$$

PART3 円順列

3 (1) A，B，C，D，Eの5人が円形に並ぶとき，次のものを求めよ。

(i) 並び方の総数　　(ii) AとBが隣り合う並び方の総数

(2) 異なる6個の玉をつなげて首飾りを作るとき，何種類の首飾りができるか。

[解答]

(1)(i) Aを固定すると，求める並び方の総数は残りの4人の順列である。

よって $4!=24$（通り）

(ii) AとBを1組と考えて，この2人を固定すると，残り3人の順列は $3!$ 通り。

1組と考えた2人の並び方は $2!$ 通り。

よって，求める並び方の総数は $3!\times2!=6\times2=12$（通り）

(2) 異なる6個の玉を円形に並べる方法は $5!$ 通り。

これを首飾りにしたとき，裏返すと同じ並び方になるものが2通りずつある。

よって，求める場合の数は $\dfrac{5!}{2}=\dfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2}=60$（種類）

PART4　重複順列

4　(1)　5 問の問題の解答を○か×で答えるとき，○，×の答え方は何通りあるか。

(2)　0，1，2，3 の 4 個の数字を，重複を許して使って整数を作るとき，次のような整数は何個できるか。

(i)　4 桁の整数　　　(ii)　4 桁の偶数

[解答]

(1)　5 問の問題それぞれについて，答え方は○，×の 2 通り。

よって　$2^5 = 32$（通り）

(2)(i)　千の位は 1 ～ 3 の 3 通り。

残りの位の決め方は 4^3 通り。

よって，4 桁の整数の個数は　$3 \times 4^3 = 192$（個）

(ii)　千の位は 1 ～ 3 の 3 通り。

一の位は 0，2 の 2 通り。

残りの位の決め方は 4^2 通り

よって，4 桁の偶数の個数は　$3 \times 2 \times 4^2 = 96$（個）

第 3 講　組合せ

PART1　組合せ

1　(1)　次の値を求めよ。

(i)　${}_8C_3$　　(ii)　${}_6C_4$　　(iii)　${}_5C_1$

(2)　次のものの総数を求めよ。

(i)　10 人の生徒から 4 人を選ぶときの選び方。

(ii)　正六角形の 6 個の頂点のうち，3 点を結んでできる三角形の個数。

[解答]

(1)(i)　${}_8C_3=\dfrac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}=56$　　(ii)　${}_6C_4={}_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}=15$　　(iii)　${}_5C_1=5$

(2)(i)　${}_{10}C_4=\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=210$（通り）

(ii)　求める三角形の個数は，6 個から 3 個取る組合せの総数である。

よって ${}_6C_3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20$（個）

PART2 組合せの利用

2 男子7人，女子5人の中から3人を選ぶとき，次のような選び方はそれぞれ何通りあるか。

(1) 男女問わず3人選ぶ。

(2) 男子1人，女子2人を選ぶ。

(3) 男子が少なくとも1人含まれるように選ぶ。

[解答]

(1) ${}_{12}C_3=\dfrac{12\cdot11\cdot10}{3\cdot2\cdot1}=220$ (通り)

(2) 男子の選び方は ${}_7C_1$ 通り，そのおのおのに対し，女子の選び方は ${}_5C_2$ 通りある。

よって，求める場合の数は　${}_7C_1\times{}_5C_2=7\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=70$ (通り)

(3) (解法1)

男子が1人も選ばれないのは，3人とも女子を選ぶときで ${}_5C_3$ 通り。

よって，求める場合の数は

$${}_{12}C_3-{}_5C_3=220-\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=210 \text{ (通り)}$$

(解法2)

男子が少なくとも1人含まれるのは

①男子1人，女子2人　②男子2人，女子1人　③男子3人

のいずれかの場合である。

①の場合の数は　${}_7C_1\times{}_5C_2=70$ (通り)

②の場合の数は　${}_7C_2\times{}_5C_1=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}\times5=105$ (通り)

③の場合の数は　${}_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$ (通り)

①，②，③は同時には起こらないので，求める場合の数は

$70+105+35=210$ (通り)

PART3 組分け

3 異なる9個の玉を次のように分けるとき，分け方は何通りあるか。

(1) A，B，Cの3人に3個ずつ分ける。

(2) 3個ずつ3つの組に分ける。

(3) 2個，2個，2個，3個の4つの組に分ける。

[解答]

(1) Aに分ける3個の玉を選び，次にBに分ける3個の玉を選ぶと，Cに分ける3個の玉は残った3個に決まる。よって，分け方の総数は

$$ {}_9C_3 \times {}_6C_3 = \frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2\cdot1} \times \frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1} = 1680 \text{（通り）} $$

(2) (1)の分け方で，同じ個数の組A，B，Cの区別をなくすと，同じ分け方になるものが $3!$ 通りずつ存在する。

よって，分け方の総数は $\dfrac{1680}{3!} = \dfrac{1680}{6} = 280$（通り）

(3) 9個の玉をA，B，C，Dの4組にそれぞれ2個，2個，2個，3個ずつ分けるときの分け方の総数は ${}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2$ 通り。

同じ個数の組A，B，Cの区別をなくすと，同じ分け方になるものが $3!$ 通りずつ存在する。

よって，分け方の総数は $\dfrac{{}_9C_2 \times {}_7C_2 \times {}_5C_2}{3!} = \dfrac{9\cdot8}{2\cdot1} \times \dfrac{7\cdot6}{2\cdot1} \times \dfrac{5\cdot4}{2\cdot1} \times \dfrac{1}{6} = 1260$（通り）

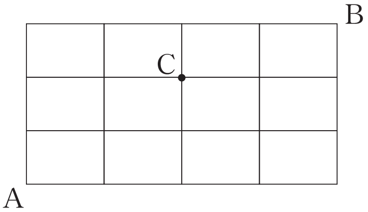
PART4 同じものを含む順列

4 (1) 1，1，1，2，2，3 の 6 個すべてを使ってできる 6 桁の整数は何個あるか。

(2) 右の図は，ある町の道を直線で表したものである。次の場合，遠回りをしないで行く道順は何通りあるか。

(i) A から B まで行く。

(ii) A から C を通って B まで行く。



[解答]

(1) $\dfrac{6!}{3!2!}=\dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot1}=60$（通り）

（別解）

3 個の 1 が入る位の選び方は ${}_6C_3$ 通り。

残りの位において，2 個の 2 が入る位の選び方は ${}_3C_2$ 通り。

3 は残った位に入る。

よって，求める順列の総数は ${}_6C_3\times{}_3C_2=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times\dfrac{3\cdot2}{2\cdot1}=60$（通り）

(2) 右に 1 区画進むことを→，上に 1 区画進むことを↑で表す。

(i) A から B に行くときの道順は，→ 4 個と↑ 3 個，合計 7 個の順列で表される。

よって，求める道順の総数は $\dfrac{7!}{4!3!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1}=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}=35$（通り）

(ii) A から C まで行く道順は $\dfrac{4!}{2!2!}$ 通り，C から B まで行く道順は $\dfrac{3!}{2!}$ 通り。

よって，求める道順の総数は，積の法則より $\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{3!}{2!}=6\times3=18$（通り）

第 4 講　事象と確率

PART1　試行と事象

1　(1)　1 個のさいころを投げるとき，4 以下の目が出る確率を求めよ。

(2)　当たりくじが 3 本入っている 5 本のくじから 1 本引くとき，当たりくじを引く確率を求めよ。

(3)　2 枚の 10 円硬貨を同時に投げるとき，1 枚は表，1 枚は裏になる確率を求めよ。

[解答]

(1)　例えば 1 の目が出ることを単に 1 と表すとすると，1 個のさいころの目の出方は 1，2，3，4，5，6 の 6 通りであり，これらは同様に確からしい。

4 以下の目が出る場合は，1，2，3，4 の 4 通りある。

よって，4 以下の目が出る確率は $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

(2)　当たりくじを a_1，a_2，a_3，はずれくじを b_1，b_2 とすると，くじを 1 本引くときの場合の数は a_1，a_2，a_3，b_1，b_2 の 5 通りであり，これらは同様に確からしい。

当たりくじを引く場合の数は a_1，a_2，a_3 の 3 通り。

よって，当たりくじを引く確率は $\frac{3}{5}$

(3)　2 枚の硬貨を A，B とすると，A，B の表と裏の出方は，積の法則により $2\times2=4$（通り）であり，これらは同様に確からしい。

A, B の表と裏の出方を　(A の表裏, B の表裏）と表すとすると, 1 枚が表, 1 枚が裏となるのは，(表，裏)と(裏，表)の 2 通り。

よって，求める確率は $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

PART2 順列・組合せと確率

2 (1) A, B, C, D, E, F の6人が1列に並ぶとき，A, B, C の3人が隣り合う確率を求めよ。

(2) 赤玉5個，白玉2個の入った袋から，同時に3個の玉を取り出すとき，次の確率を求めよ。

(i) 3個とも赤玉が出る確率　　(ii) 赤玉1個と白玉2個が出る確率

[解答]

(1) 6人が1列に並ぶ方法は $6!$ 通り。

このうち，A，B，C が隣り合う場合の並び方は $4!\times 3!$ 通り。

よって，求める確率は $\dfrac{4!\times 3!}{6!}=\dfrac{3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5}=\dfrac{1}{5}$

(2) 3個の玉の取り出し方は ${}_7C_3$ 通り。

(i) 3個とも赤玉が出る場合は，5個の赤玉から3個取り出す場合で ${}_5C_3$ 通り。

よって，求める確率は $\dfrac{{}_5C_3}{{}_7C_3}=\dfrac{10}{35}=\dfrac{2}{7}$

(ii) 赤玉1個，白玉2個が出る場合は，5個の赤玉から1個，2個の白玉から2個取り出す場合で，${}_5C_1\times{}_2C_2$ 通り。

よって，求める確率は $\dfrac{{}_5C_1\times{}_2C_2}{{}_7C_3}=\dfrac{5\times 1}{35}=\dfrac{1}{7}$

PART3 確率の基本性質

3 1から9までの数が1つずつ書かれた9枚のカードから同時に3枚取り出す。
このとき，次の確率を求めよ。

(1) 3枚の札の数がすべて偶数，またはすべて奇数である確率

(2) 3枚の札の数の和が偶数である確率

[解答]

(1) 3枚の札の数がすべて奇数である事象 A と，すべて偶数である事象 B は，互いに排反である。

$$P(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{10}{84},\quad P(B)=\frac{{}_4\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{4}{84}$$

確率の加法定理により，求める確率は

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{10}{84}+\frac{4}{84}=\frac{14}{84}=\frac{1}{6}$$

(2) 3枚の札の数の和が偶数という事象は，

3枚の札の数がすべて偶数である事象 B,

2枚が奇数，1枚が偶数である事象 C

の和事象で，これらは互いに排反である。

(1)より，$P(B)=\frac{4}{84}$

$$P(C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1}{{}_9\mathrm{C}_3}=\frac{40}{84}$$

確率の加法定理により，求める確率は

$$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=\frac{4}{84}+\frac{40}{84}=\frac{44}{84}=\frac{11}{21}$$

PART4 和事象の確率，余事象の確率

4 (1) 男子 4 人, 女子 3 人を横 1 列に並べるとき, 左端または右端が男子である確率を求めよ。

(2) 1 から 7 までの数が書かれたカードが，各数字 2 枚ずつ，合計 14 枚ある。この中から 2 枚同時に取り出すとき，次の確率を求めよ。

(i) 少なくとも 1 枚は 1 である確率

(ii) 2 枚が異なる数字である確率

[解答]

(1) 左端が男子である確率は $\dfrac{4\times6!}{7!}=\dfrac{4}{7}$

右端が男子である確率は $\dfrac{4\times6!}{7!}=\dfrac{4}{7}$

両端が男子である確率は $\dfrac{{}_4P_2\times5!}{7!}=\dfrac{2}{7}$

よって，求める確率は，$\dfrac{4}{7}+\dfrac{4}{7}-\dfrac{2}{7}=\dfrac{6}{7}$

(2)(i) 「少なくとも 1 枚は 1 である」事象は，「2 枚とも 1 でない」事象の余事象である。

2 枚とも 1 でない確率は $\dfrac{{}_{12}C_2}{{}_{14}C_2}=\dfrac{66}{91}$

よって，求める確率は $1-\dfrac{66}{91}=\dfrac{25}{91}$

(ii) 「2 枚が異なる数字である」事象は，「2 枚が同じ数字である」事象の余事象である。

2 枚が同じ数字である確率は $\dfrac{7}{{}_{14}C_2}=\dfrac{7}{91}=\dfrac{1}{13}$

よって，求める確率は $1-\dfrac{1}{13}=\dfrac{12}{13}$

第 5 講　独立な試行の確率，反復試行の確率

PART1　独立な試行の確率

1　(1)　1 個のさいころを 2 回続けて投げるとき，次の確率を求めよ。

(i)　1 回目に奇数の目，2 回目に 6 の約数の目が出る確率

(ii)　少なくとも 1 回は 6 の約数の目が出る確率

(2)　袋 A には赤玉 2 個，白玉 4 個，袋 B には赤玉 1 個，白玉 3 個が入っている。それぞれの袋から玉を 2 個ずつ，合計 4 個取り出すとき，取り出した 4 個の中に赤玉が 1 個だけ含まれる確率を求めよ。

[解答]

(1)　さいころを投げる各回の試行は独立である。

(i)　6 の約数の目は 1，2，3，6 である。1 回目に奇数の目，2 回目に 6 の約数の目が出る確率は

$$\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

(ii)　「少なくとも 1 回は 6 の約数の目が出る」事象は，「2 回とも 6 の約数以外の目が出る」事象の余事象である。

2 回とも 6 の約数以外の目が出る確率は $\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$

よって，少なくとも 1 回は 6 の約数の目が出る確率は $1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

(2)　袋 A から玉を 2 個取り出す試行と，袋 B から玉を 2 個取り出す試行は独立である。

取り出した 4 個の中に赤玉が 1 個だけ含まれる事象は，次の [1]，[2] のいずれか。

[1]　袋 A から赤玉 1 個と白玉 1 個，袋 B から白玉 2 個を取り出す

[2]　袋 A から白玉 2 個，袋 B から赤玉 1 個と白玉 1 個を取り出す

[1] の確率は $\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{24}{90}$

[2] の確率は $\frac{{}_4C_2}{{}_6C_2}\times\frac{1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{18}{90}$

[1]，[2] は互いに排反であるから，求める確率は $\frac{24}{90}+\frac{18}{90}=\frac{42}{90}=\frac{7}{15}$

PART2 反復試行の確率

2 1個のさいころを続けて4回投げるとき，次の確率を求めよ。

(1) 1の目がちょうど2回出る確率

(2) 5以上の目がちょうど3回出る確率

(3) 偶数の目が2回以上出る確率

[解答]

(1) さいころを1回投げるとき

1の目が出る確率は $\frac{1}{6}$，1の目が出ない確率は $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

よって，求める確率は ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{216}$

(2) さいころを1回投げるとき

5以上の目が出る確率は $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，4以下の目が出る確率は $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

よって，求める確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{8}{81}$

(3) さいころを1回投げるとき

偶数の目が出る確率は $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，奇数の目が出る確率は $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

4回投げて偶数の目が2回以上出るのは以下のとき。

[1] 偶数の目がちょうど2回出る

これが起こる確率は ${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{6}{16}$

[2] 偶数の目がちょうど3回出る

これが起こる確率は ${}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1=\frac{4}{16}$

[3] 偶数の目が4回出る

これが起こる確率は ${}_4\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0=\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$

[1]，[2]，[3] の事象は互いに排反であるから，求める確率は

$$\frac{6}{16}+\frac{4}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

（別解）

4 回投げて偶数の目が 2 回以上出るという事象は，偶数の目が 1 回以下，すなわち偶数の目が 1 回または 0 回だけ出ることの余事象である。

よって，求める確率は

$$1-\left\{{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}=1-\left\{{}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}$$

$$=1-\left(\frac{4}{16}+\frac{1}{16}\right)=1-\frac{5}{16}=\frac{11}{16}$$

第 6 講　条件付き確率，期待値

PART1　条件付き確率

1　当たりくじ4本を含む20本のくじがある。引いたくじはもとに戻さないとして，1本ずつ2回続けてくじを引く。このとき次の確率を求めよ。

(1)　1回目に当たりくじを引いたとき，2回目も当たりくじを引く確率

(2)　2回とも当たりくじを引く確率

(3)　2回目に当たりくじを引く確率

[解答]

(1)　1回目に当たりくじを引く事象を A，2回目に当たりくじを引く事象を B とする。

求める確率は，A が起こったときの B の起こる条件付き確率であることより

$$P_A(B)=\frac{3}{19}$$

(2)　事象 A が起こる確率は $P(A)=\frac{4}{20}\left(=\frac{1}{5}\right)$

よって求める確率は，$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=\frac{4}{20}\times\frac{3}{19}=\frac{3}{95}$

(3)　2回目に当たりくじを引く事象は，次の [1]，[2] のいずれか。

[1]　1回目に当たり，2回目も当たる

この事象の確率は，(2)より　$\frac{3}{95}$

[2]　1回目ははずれ，2回目は当たる

この事象の確率は $P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)=\frac{16}{20}\times\frac{4}{19}=\frac{16}{95}$

[1]，[2] は互いに排反である。よって，求める確率は

$$\frac{3}{95}+\frac{16}{95}=\frac{19}{95}=\frac{1}{5}$$

PART2 期待値

2 赤玉2個，白玉3個が入った袋から，同時に2個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 赤玉1個につき100円をもらえるとき，1回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

[解答]

(1) 取り出した2個の玉に含まれる赤玉の個数は，0，1，2個のいずれかである。

・赤玉が0個となる確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

・赤玉が1個となる確率は $\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{2\times3}{10}=\dfrac{6}{10}$

・赤玉が2個となる確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

したがって，求める赤玉の個数の期待値は

$$0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(0\times3+1\times6+2\times1)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}=0.8\ (個)$$

(2) (1)より，もらえる金額 X と確率は以下

X	0	100	200	計
確率	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	1

したがって，求める金額の期待値は

$$0\times\frac{3}{10}+100\times\frac{6}{10}+200\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(0\times3+100\times6+200\times1)=\frac{800}{10}=80\ (円)$$

第 7 講　三角形の性質

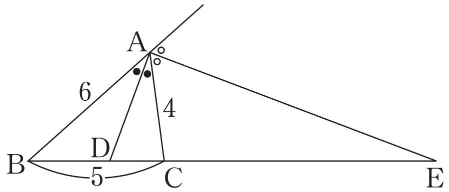
PART1　線分の内分・外分，角の二等分線と比

1　AB＝6，BC＝5，CA＝4 の △ABC において，∠A の二等分線と辺 BC との交点を D，∠A の外角の二等分線と辺 BC の延長との交点を E とする。

(1)　線分 BD の長さを求めよ。

(2)　線分 CE の長さを求めよ。

(3)　線分 DE の長さを求めよ。

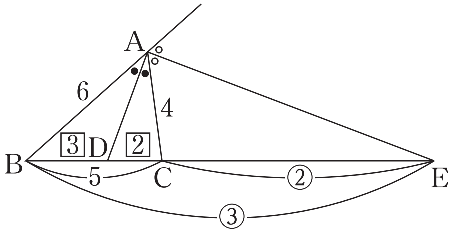


[解答]

(1)　AD は ∠A の二等分線であるから

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=6:4=3:2$$

よって $\mathrm{BD}=\dfrac{3}{3+2}\mathrm{BC}=\dfrac{3}{5}\mathrm{BC}=\dfrac{3}{5}\cdot 5=3$



(2)　AE は ∠A の外角の二等分線であるから

$$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=\mathrm{AB}:\mathrm{AC}=3:2$$

CE＝x とおくと

$$(x+5):x=3:2 \qquad 2(x+5)=3x \qquad x=10$$

よって CE＝10

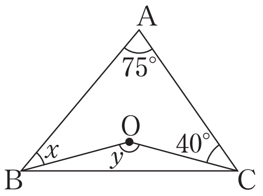
(3)　DC＝BC−BD＝5−3＝2

よって DE＝DC＋CE＝2＋10＝12

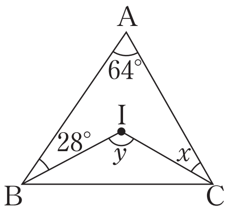
PART2 三角形の外心・内心

2 下の図において，点Oは△ABCの外心，点Iは△ABCの内心である。x, y の値を求めよ。

(1)



(2)



[解答]

(1) $x = 75° - 40° = 35°$

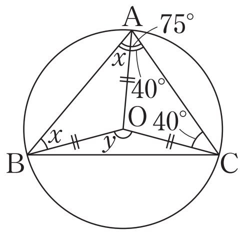
$y = \angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 75° = 150°$

(2) $2x + 2 \times 28° + 64° = 180°$ $\quad x = 30°$

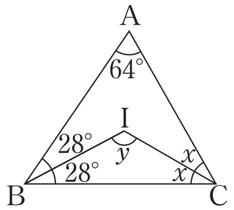
$y = 180° - (28° + 30°) = 122°$

(参考図)

(1)

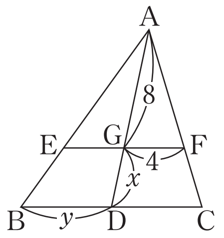


(2)



PART3 三角形の重心

3 下の図において，点Gは △ABC の重心で，EF // BC である。x，y の値を求めよ。



[解答]

AG：GD＝2：1 より　8：x＝2：1　　$2x$＝8　　よって　x＝4

AD は中線より，点 D は辺 BC の中点である。

よって，CD＝BD＝y

AG：AD＝FG：CD より 8：(8＋4)＝4：y　　$8y$＝48　　よって　y＝6

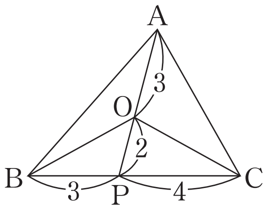
PART4 三角形の線分の比と面積比

4 右の図の △ABC において，次のものを求めよ。

(1) △ABP：△ACP

(2) △OBC：△ABC

(3) △OAB：△OAC



[解答]

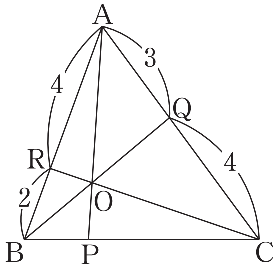
(1) $\dfrac{\triangle ABP}{\triangle ACP}=\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{3}{4}$　　よって △ABP：△ACP＝3：4

(2) $\dfrac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\dfrac{OP}{AP}=\dfrac{2}{5}$　　よって △OBC：△ABC＝2：5

(3) $\dfrac{\triangle OAB}{\triangle OAC}=\dfrac{BP}{CP}=\dfrac{3}{4}$　　よって △OAB：△OAC＝3：4

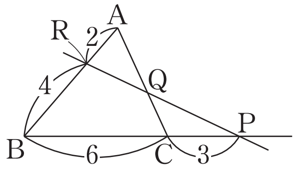
PART5 チェバの定理，メネラウスの定理

5 (1) 右の図において，BP：PC を求めよ。

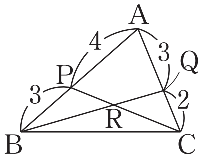


(2) 下の図において，次の比を求めよ。

(i) CQ：QA



(ii) PR：RC



[解答]

(1) チェバの定理より $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　すなわち $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{4}{2}=1$

よって $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}=\dfrac{3}{8}$ より BP：PC＝3：8

(2)(i) メネラウスの定理より $\dfrac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=1$　すなわち $\dfrac{9}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}\cdot\dfrac{2}{4}=1$

よって $\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=\dfrac{2}{3}$ より CQ：QA＝2：3

(ii) メネラウスの定理より $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BP}}\cdot\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$　すなわち $\dfrac{7}{3}\cdot\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}\cdot\dfrac{2}{3}=1$

よって $\dfrac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RC}}=\dfrac{9}{14}$ より PR：RC＝9：14

PART6　三角形の辺と角

6 (1)　次の長さの線分を３辺とする三角形が存在するかどうかを調べよ。

(i)　5，12，15　　(ii)　6，3，2

(2)(i)　$AB=4$，$BC=5$，$CA=7$ である $\triangle ABC$ において，３つの角 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ のうちもっとも大きいものを答えよ。

(ii)　$\angle A=60^\circ$，$\angle B=40^\circ$ である $\triangle ABC$ において，３辺 AB，BC，CA のうちもっとも大きいものを答えよ。

[解答]

(1)(i)　$5<12<15$ であり，$15<5+12$ が成り立つ。

よって，３辺の長さが 5，12，15 の三角形は 存在する。

(ii)　$2<3<6$ であり，$6<2+3$ は成り立たない。

よって，３辺の長さが 6，3，2 の三角形は 存在しない。

(2)(i)　$AB<BC<CA$ より，最大辺 CA の対角である $\angle B$ が最大角

(ii)　$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)=180^\circ-(60^\circ+40^\circ)=80^\circ$

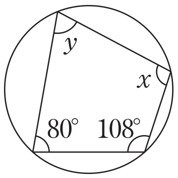
よって $\angle B<\angle A<\angle C$ より，最大角 $\angle C$ の対辺である辺 AB が最大辺

第 8 講　円の性質

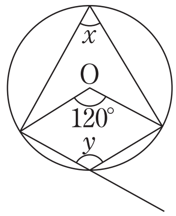
PART1　円に内接する四角形

1　(1)　次の図において，x，y を求めよ。

(i)

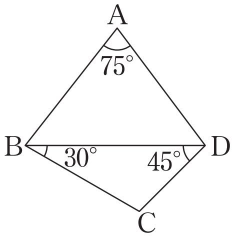


(ii)

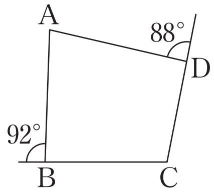


(2)　次の四角形 ABCD のうち，円に内接するものを答えよ。

①



②



[解答]

(1)(i)　$x=180^\circ-80^\circ=100^\circ$，$y=180^\circ-108^\circ=72^\circ$

(ii)　$x=120^\circ\times\dfrac{1}{2}=60^\circ$，$y=180^\circ-x=180^\circ-60^\circ=120^\circ$

(2)　①について

$\angle C=180^\circ-(30^\circ+45^\circ)=105^\circ$

よって，$\angle A+\angle C=75^\circ+105^\circ=180^\circ$ より，四角形 ABCD は円に内接する。

②について

$\angle ABC=180^\circ-92^\circ=88^\circ$

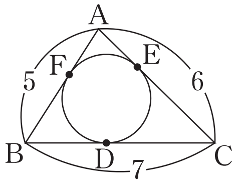
よって，$\angle ABC$ の大きさが頂点 D における外角の大きさと等しいので，

四角形 ABCD は円に内接する。

以上より，円に内接するのは①，②

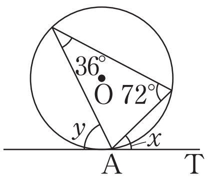
PART2 円と接線

2 (1) 右図のように，円が △ABC の各辺に接していて D，E，F は接点である。AB＝5，BC＝7，CA＝6 のとき，AF の長さを求めよ。

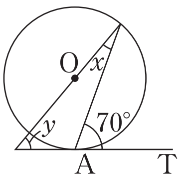


(2) 下の図において，直線 AT は円 O の接線，点 A は接点である。x，y を求めよ。

(i)



(ii)



[解答]

(1) AF＝AE＝x とおくと

BF＝BD＝$5-x$，CE＝CD＝$6-x$

BD＋CD＝BC より $(5-x)+(6-x)=7$　　$x=2$

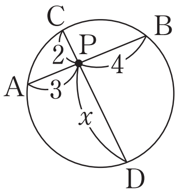
よって AF＝2

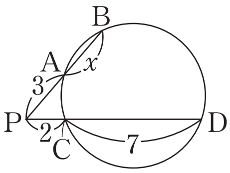
(2)(i) $x=36°$，$y=72°$

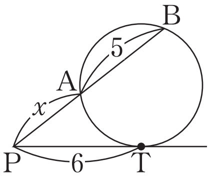
(ii) $x=180°-90°-70°=20°$，$y=70°-x=70°-20°=50°$

PART3 方べきの定理

3 次の図において，x を求めよ。ただし，点Tは接点とする。

(1)


(2)


(3)


[解答]

(1)　$2 \cdot x = 3 \cdot 4$　　$x = 6$

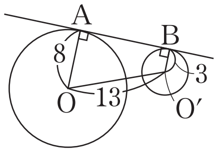
(2)　$3(3+x) = 2 \cdot (2+7)$　　$3+x = 6$　　$x = 3$

(3)　$x(x+5) = 6^2$　　$x^2 + 5x - 36 = 0$　　$(x+9)(x-4) = 0$　　$x > 0$ より $x = 4$

PART4　２つの円の位置関係と共通接線

4　(1)　２円 O, O′ の半径をそれぞれ 3, 6, 中心間の距離を 9 とする。２円 O, O′ の位置関係と, 共通接線の本数を答えよ。

(2)　右の図で，直線 AB は２つの円の共通接線で, A，B は接点である。線分 AB の長さを求めよ。



[解答]

(1)　$9=3+6$ より，２円の中心間の距離と半径の和が等しい。

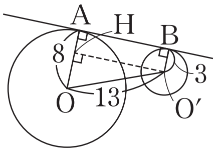
よって，２円 O，O′ は 外接する。

また，共通接線の本数は３本

(2)　O′ から OA に垂線 O′H を下ろすと，$\mathrm{OH}=5$

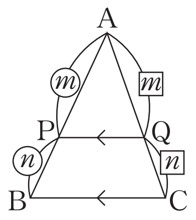
よって $\mathrm{OO'}^2=\mathrm{OH}^2+\mathrm{O'H}^2$ より $13^2=5^2+\mathrm{O'H}^2$　　$\mathrm{O'H}=12$

したがって $\mathrm{AB}=\mathrm{O'H}=12$



PART5 作図

5 右図において，PQ // BC ならば AP：PB＝AQ：QC である。
このことを利用して，線分 AB を 3：2 に内分する点を作図せよ。



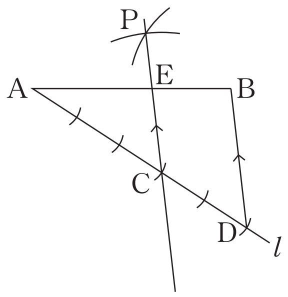
A ―――――― B

[解答]

① 点 A を通り，直線 AB と異なる直線 l を引く。

② l 上に AC：CD＝3：2 となるような点 C，D をこの順にとる。

③ 点 C を通り直線 BD に平行な直線を引き，線分 AB との交点を E とする。点 E が求める点である。



第 9 講　空間図形

PART1　直線と平面

1　右図の立方体について，次の問いに答えよ。

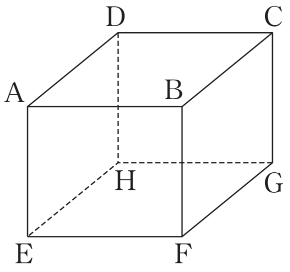
(1)　辺 AB と垂直な辺をすべて答えよ。

(2)　2 直線 AB，EG のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ とする。

(3)　辺 AB と垂直な面をすべて答えよ。

(4)　面 AEHD と垂直な面をすべて答えよ。



[解答]

(1)　辺 AD，AE，BC，BF，DH，EH，CG，FG

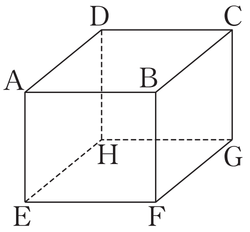
(2)　2 直線 AB，EG のなす角は，2 直線 AB，AC のなす角と等しい。

よって　　$\theta = 45^\circ$

(3)　$\mathrm{AB} \perp \mathrm{AD}$，$\mathrm{AB} \perp \mathrm{AE}$ より，辺 AB は面 AEHD に垂直

$\mathrm{AB} \perp \mathrm{BC}$，$\mathrm{AB} \perp \mathrm{BF}$ より，辺 AB は面 BFGC に垂直

よって，求める面は　面 AEHD，BFGC



(4)　(3)より，平面 AEHD と辺 AB は垂直

よって，辺 AB を含む面 ABCD，AEFB は面 AEHD と垂直

同様に，平面 AEHD と辺 HG は垂直

よって，辺 HG を含む面 EFGH，HGCD は面 AEHD と垂直

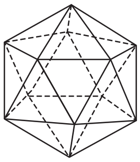
したがって，求める面は　面 ABCD，AEFB，EFGH，HGCD

PART2 多面体

2 正六面体(立方体)の面の数は6である。また，1つの面の頂点の数は4である。
ここで，1つの頂点に集まる面の数は3であることから，正六面体の頂点の数は

$$\frac{4\times6}{3}=8$$

と求めることができる。



(1) 右図は正二十面体である。この図と，上の考え方を参考に，正二十面体の頂点の数を求めよ。

(2) 正二十面体について，オイラーの多面体定理

> 多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると
> $v-e+f=2$

を用いて，辺の数を求めよ。

[解答]

(1) 正二十面体の面の数は20である。また，1つの面の頂点の数は3である。
ここで，1つの頂点に集まる面の数は5であることから，正二十面体の頂点の数は

$$\frac{3\times20}{5}=12$$

(2) 正二十面体の頂点の数を v，辺の数を e，面の数を f とすると，$v=12$，$f=20$
よって，オイラーの多面体定理より

$v-e+f=2$　　$12-e+20=2$

したがって，求める辺の数は　$e=30$

第 10 講　約数と倍数

PART1　約数と倍数

1　(1)(i)　24 の正の約数をすべて求めよ。

(ii)　15 の正の倍数を小さいものから 5 個求めよ。

(2)　5 桁の自然数 2854□が 3 の倍数かつ 5 の倍数であるとき，□に入る数を求めよ。

[解答]

(1)(i)　$24 = 1 \cdot 24 = 2 \cdot 12 = 3 \cdot 8 = 4 \cdot 6$ より，24 の正の約数は

1，2，3，4，6，8，12，24

(ii)　15 の正の倍数は，小さい順に $15 \cdot 1$, $15 \cdot 2$, $15 \cdot 3$, $15 \cdot 4$, $15 \cdot 5$

すなわち 15，30，45，60，75

(2)　2854□が 5 の倍数となるのは □＝0，5 のとき

□＝0 のとき　2＋8＋5＋4＋□＝19＋0＝19　　これは 3 の倍数ではない

□＝5 のとき　2＋8＋5＋4＋□＝19＋5＝24　　これは 3 の倍数である

したがって，求める数は 5

PART2 素因数分解と約数

2 (1) $\sqrt{1400n}$ が自然数となるような最小の自然数 n を求めよ。

(2) 150 の正の約数の個数を求めよ。

[解答]

(1) $\sqrt{1400n}$ が自然数となるのは，$1400n$ が平方数のときである。

$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7$ より，求める最小の自然数 n は $n = 2 \cdot 7 = 14$

(2) $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$

よって，150 の正の約数の個数は $(1+1)(1+1)(2+1) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$（個）

PART3 最大公約数と最小公倍数

3 (1) 3 つの整数 28，70，154 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

(2) 2 つの整数 130，231 の最大公約数と最小公倍数を求めよ。

[解答]

(1) $28 = 2^2 \cdot 7$，$70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$，$154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$

よって，最大公約数は $2 \cdot 7 = 14$，最小公倍数は $2^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 1540$

(2) $130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$，$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11$

よって，最大公約数は 1，最小公倍数は $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30030$

PART4 余りによる分類

4 2つの整数 a, b を5で割ったときの余りをそれぞれ2, 3とする。このとき, 次の数を5で割ったときの余りを求めよ。

(1) $a+b$　　(2) ab

[解答]

整数 a, b は, 整数 k, l を用いて次のように表すことができる。

$a=5k+2$, $b=5l+3$

(1) $a+b=(5k+2)+(5l+3)=5k+5l+2+3=5(k+l)+(2+3)=5(k+l)+5$

$=5(k+l)+5\cdot1=5(k+l+1)$

よって, $a+b$ を5で割ったときの余りは0

(2) $ab=(5k+2)(5l+3)=5^2kl+5\cdot3k+5\cdot2l+2\cdot3=5(5kl+3k+2l)+2\cdot3$

$=5(5kl+3k+2l)+6=5(5kl+3k+2l)+5\cdot1+1=5(5kl+3k+2l+1)+1$

よって, ab を5で割ったときの余りは1

第11講　ユークリッドの互除法，整数の性質の活用

PART1　ユークリッドの互除法

1　次の 2 つの自然数の最大公約数を，ユークリッドの互除法を用いて求めよ。

(1)　1008，810　　(2)　1057，481

[解答]

(1)　$1008=810\cdot1+198$

$810=198\cdot4+18$

$198=18\cdot11+0$

よって，1008 と 810 の最大公約数は 18

(2)　$1057=481\cdot2+95$

$481=95\cdot5+6$

$95=6\cdot15+5$

$6=5\cdot1+1$

$5=1\cdot5+0$

よって，1057 と 481 の最大公約数は 1

PART2 1次不定方程式

2 次の方程式の整数解をすべて求めよ。

(1)　$3x-5y=0$　　　　(2)　$8x+5y=1$

[解答]

(1)　$3x-5y=0$ を変形すると $3x=5y$ …… ①

3と5は互いに素より，x は5の倍数である。

よって，$x=5k$ (k は整数)と表される。

このとき，①より $3\cdot5k=5y$　　$y=3k$

したがって，求める整数解は　$x=5k$，$y=3k$ (k は整数)

(2)　$8x+5y=1$ …… ①

この方程式の整数解の1つは $x=2$，$y=-3$

よって　$8\cdot2+5\cdot(-3)=1$ …… ②

①－②より　$8(x-2)+5(y+3)=0$　　つまり　$8(x-2)=5(-y-3)$ …… ③

8と5は互いに素より，$x-2$ は5の倍数である。

よって，$x-2=5k$ (k は整数) と表される。

このとき，③より $8\cdot5k=5(-y-3)$　　$8k=-y-3$　　$y+3=-8k$

したがって，求める整数解は　$x=5k+2$，$y=-8k-3$ (k は整数)

PART3 1 次不定方程式とユークリッドの互除法

3 次の方程式の整数解の１つを , 互除法を用いて求めよ。

$$42x+29y=1$$

[解答]

42 と 29 に互除法を用いると

$42=29\cdot1+13$ …… ①

$29=13\cdot2+3$ …… ②

$13=3\cdot4+1$ …… ③

③より　$1=13-3\cdot4$ …… ③′

②より　$3=29-13\cdot2$ …… ②′

①より　$13=42-29\cdot1$ …… ①′

③′ に ②′ を代入して整理し，さらに ①′ を代入して整理すると

$$\begin{aligned}1&=13-3\cdot4\\&=13-(29-13\cdot2)\cdot4\\&=13-29\cdot4+13\cdot8\\&=13\cdot9-29\cdot4\\&=(42-29\cdot1)\cdot9-29\cdot4\\&=42\cdot9-29\cdot9-29\cdot4\\&=42\cdot9+29\cdot(-13)\end{aligned}$$

よって，$42\cdot9+29\cdot(-13)=1$ より，方程式 $42x+29y=1$ の整数解の１つは

$x=9$，$y=-13$

PART4 整数の性質の活用

4 (1) 2 進数 $110010_{(2)}$ を 10 進法で表せ。

(2) 10 進数 87 を 2 進法で表せ。

[解答]

(1) $110010_{(2)}=1\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0=32+16+2=50$

(2) 87 を 2 で割ると商は 43 で余りは 1 ……①

43 を 2 で割ると商は 21 で余りは 1 ……②

21 を 2 で割ると商は 10 で余りは 1 ……③

10 を 2 で割ると商は 5 で余りは 0 ……④

5 を 2 で割ると商は 2 で余りは 1 ……⑤

2 を 2 で割ると商は 1 で余りは 0 ……⑥

1 を 2 で割ると商は 0 で余りは 1 ……⑦

①～⑦の余りを⑦から①まで逆順に並べて　$1010111_{(2)}$

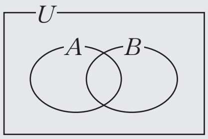
2)	87	余り	
2)	43	1	①
2)	21	1	②
2)	10	1	③
2)	5	0	④
2)	2	1	⑤
2)	1	0	⑥
	0	1	⑦

第 1 講　PART1 確認問題 解答

100 以下の自然数全体の集合を U として，U の部分集合のうち，4 の倍数全体の集合を A，9 の倍数全体の集合を B とすると，

$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$ [A]

$B=\{9\cdot1,\ 9\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 9\cdot11\}$

[A]


集合を考えて求めるとわかりやすい。

1 **[正解]** アイ：25

[解説]

$n(A)=25$ なので

4 の倍数の個数は，**25 個**

2 **[正解]** ウエ：75

[解説]

$n(A)=25$ より，[B]

$n(\overline{A})=n(U)-n(A)$ [C]

$=100-25=75$

よって，4 の倍数でない数は，**75 個**

[B]　$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$

[C]　4 の倍数でない数全体の集合は $\overline{A}$ である。

3 **[正解]** オ：2

[解説]

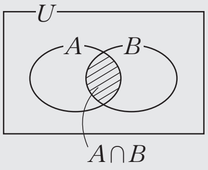
4 の倍数かつ 9 の倍数は，4 と 9 の最小公倍数 36 の倍数である。

この数全体の集合は $A\cap B$ であり，[D]

$A\cap B=\{36\cdot1,\ 36\cdot2\}$

$n(A\cap B)=2$

よって，4 の倍数かつ 9 の倍数は，**2 個**

[D]


4 [正解] カキ：34

[解説]

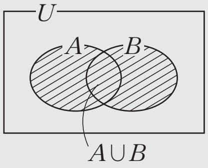
4の倍数または9の倍数全体の集合は, $A \cup B$ である。 [E]

$n(A)=25$, $n(B)=11$, $n(A \cap B)=2$ なので

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$
$$=25+11-2=34$$

よって，4の倍数または9の倍数は，**34個**

[E]



$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$

$B=\{9\cdot1,\ 9\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 9\cdot11\}$

$A \cap B=\{36\cdot1,\ 36\cdot2\}$

5 [正解] クケ：23

[解説]

4の倍数であるが9の倍数でない数全体の集合は

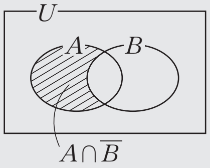
$A \cap \overline{B}$ である。 [F]

$n(A)=25$, $n(A \cap B)=2$ なので

$$n(A \cap \overline{B})=n(A)-n(A \cap B)$$
$$=25-2=23$$

よって，4の倍数であるが9の倍数でない数は，**23個**

[F]



$A=\{4\cdot1,\ 4\cdot2,\ \cdots\cdots,\ 4\cdot25\}$

$A \cap B=\{36\cdot1,\ 36\cdot2\}$

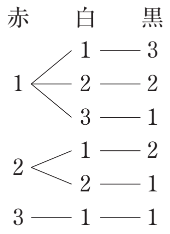
第 1 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：6

[解説]

赤，白，黒 3 種類の玉の取り出した個数を樹形図に表すと，次のようになる。



[A]

よって，求める場合の数は，**6 通り**

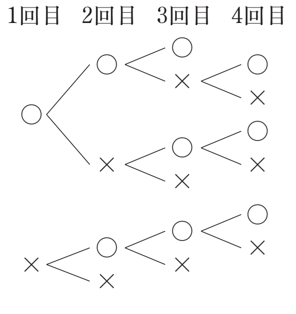
[A]　赤，白，黒を左から順にもれなく，重複なく樹形図をかいていく。

2

[正解] イウ：10

[解説]

コインを投げたときの表，裏の出方について，樹形図をつくると次のようになる。（表を○，裏を×とする）



[B]

よって，求める場合の数は，**10 通り**

[B]　左から 1 回目, 2 回目, …として，もれなく，重複なく○，×をかいていく。○が 3 個，または×が 2 個ついたところで終了とする。

第 1 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

大小 2 つのさいころの目の出方を

(大きいさいころの目，小さいさいころの目)

で表す。

目の和が 3 になるのは，(1，2)，(2，1)の 2 通り。

目の和が 6 になるのは，

(1，5)，(2，4)，(3，3)，(4，2)，(5，1)

の 5 通り。

これらは同時には起こらないので，[A]

求める場合の数は，

$2+5=$ **7(通り)**

[A]　和の法則が成り立つ。

2

[正解] イ：6

[解説]

目の和が 10 以上になるのは，目の和が 10，11，12 のいずれかになる場合である。[B]

[B]　起こりうる場合を書き出す。

目の和が 10 になるのは，(4，6)，(5，5)，(6，4) の 3 通り。

目の和が 11 になるのは，(5，6)，(6，5)の 2 通り。

目の和が 12 になるのは，(6，6)の 1 通り。

これらは同時には起こらないので，[C]

求める場合の数は，

$3+2+1=$ **6(通り)**

[C]　和の法則が成り立つ。

第 1 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：6

[解説]

1 回目で奇数の目が出るのは，

1，3，5 の 3 通り

そのどの場合においても，

2 回目に 5 以上の目が出るのは，

5，6 の 2 通り

よって，求める場合の数は，[A]

$3 \times 2 =$ **6（通り）**

[A]　事柄 A の起こり方が a 通りあり，そのどの場合においても，事柄 B の起こり方が b 通りであるとき，A と B がともに起こる場合の数は，$a \times b$ 通りである。

2

[正解] イウ：60

[解説]

A 組から 1 人を選ぶ方法が 3 通り。

そのどの場合においても，B 組から 1 人を選ぶ方法が 4 通り。さらに，そのどの場合においても，C 組から 1 人を選ぶ方法が 5 通りある。

よって，求める場合の数は，[B]

$3 \times 4 \times 5 =$ **60（通り）**

[B]　積の法則を利用する。3 つ以上の事柄についても，同様に成り立つ。

第 2 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：30

[解説]

$_6P_2=6\cdot5$ [A]

$=30$

[A]　$_nP_r$

$=\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{個}}$ $(n\geqq r)$

2

[正解] ウ：8

[解説]

$_8P_1=8$ [B]

[B]　$_nP_r$

$=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

3

[正解] エオ：24

[解説]

$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1$ [C]

$=24$

[C]　階乗

$n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

4

[正解] カキク：720

[解説]

$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ [D]

$=720$

[D]　$n!=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1$

5

[正解] ケ：5，コ：3，サシ：60

[解説]

5人の中から3人を選んで1列に並べるので，5個のものから3個取って並べる順列の総数に等しい。

$_5P_3=5\cdot4\cdot3$ [E]

$=60$（通り）

[E]　異なる n 個のものから異なる r 個を取り出して並べる順列の総数は，

$_nP_r=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

6 **[正解]** **ス**：5，**セソタ**：120

[解説]

5 文字を 1 列に並べて文字列をつくるので，

5 個のものをすべて並べる順列の総数に等しい。

$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ [F]

$= \mathbf{120}$ **(通り)**

[F]　異なる n 個のものをすべて並べる順列の総数は，
$_nP_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$

第 2 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：60

[解説]

3 人の生徒に配る方法は，5 枚のカードから 3 枚選んで 1 列に並べる順列の総数に等しい。[A]

つまり，$_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot4\cdot3$ [B]

$= 60$ (通り)

[A]　順列の数 $_n\mathrm{P}_r$ の考え方を使う。

[B]　$_n\mathrm{P}_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$

2

[正解] ウエ：60

[解説]

ある整数が奇数であるとき，その一の位は奇数である。

よって，一の位は 1，3，5 の 3 通り。[C]

そのいずれの場合についても，百, 十の位の選び方は，残り 5 個の数字から 2 個取る順列の総数に等しく，$_5\mathrm{P}_2$ 通り。[D]

よって，3 桁の奇数の個数は，[E]

$3\times{}_5\mathrm{P}_2 = 3\times5\cdot4$

$= 60$ (個)

[C]　奇数となるように，まず一の位にくる数字を決める。

[D]　百, 十の位にくる数字を決める。

[E]　積の法則

3

[正解] オカキ：720

[解説]

大人 2 人が両端に並ぶ並び方は，$_3\mathrm{P}_2$ 通り

そのいずれの場合についても，残り 5 人の並び方は，[F]

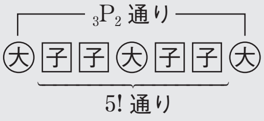
5! 通り

よって，求める並び方の総数は，

$_3\mathrm{P}_2\times5! = 3\cdot2\times5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$ [G]

$= 720$ (通り)

[F]　両端に並ぶ大人を決めた後，両端に並んだ大人 2 人を除く 5 人の並び方を考える。



[G]　積の法則

4 **[正解] クケコ**：720

[解説]

隣り合う子ども 3 人を 1 人とみなすと，並び方の総数は 5 人が並ぶ順列に等しく，5! 通りである。

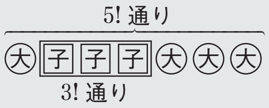
そのいずれの場合についても，子ども 3 人の並び方は，3! 通り。 [H]

よって，求める並び方の総数は，

$$5!\times3!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\times3\cdot2\cdot1$$

$$=\mathbf{720}$$ **(通り)**

[H]



第 2 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：120

[解説]

6 人が輪を作る方法は，6 個のものの円順列の数に等しい。

$(6-1)!=5!$ [A]

$=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=\mathbf{120}$ **(通り)**

[A]　異なる n 個のものの円順列の総数は，
$(n-1)!$

2

[正解] エオ：48

[解説]

a と b が隣り合うので，この 2 人をまとめて 1 人と考えると，[B]

並び方は 5 個のものの円順列だから，

$(5-1)!=4!$ (通り)

このそれぞれに対して，a と b の並び方が $2!$ 通りあるから，[C]

求める場合の数は，

$4!\times2!=4\cdot3\cdot2\cdot1\times2\cdot1=\mathbf{48}$ **(通り)**

[B]　隣り合う場合にはそれらを 1 つのものとみなす。

[C]　a と b も並べ方があることに注意する。

3

[正解] カキクケ：2520

[解説]

異なる 8 個の玉を円形に並べる方法は，8 個のものの円順列の数に等しいから，

$(8-1)!=7!$ (通り) [D]

これを首飾りにしたとき，裏返すと同じ並び方になるものが 2 通りずつある。[E]

よって，求める場合の数は，[F]

$$\frac{7!}{2}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2}=\mathbf{2520}\ \textbf{(通り)}$$

[D]　まずは円順列を考える。

[E]　同じものが 2 通りずつあるので，全体を 2 で割る。

[F]　異なる n 個のもののじゅず順列の総数は，
$\dfrac{(n-1)!}{2}$

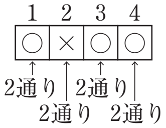
第２講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：16

[解説]

問題ごとに○か×の２通りの答え方がある。



４問の答え方は，異なる２個から４個取り出して並べる重複順列の数に等しい。

$2^4=\mathbf{16}$ **（通り）** [A]

[A]　異なる n 個のものから重複を許して r 個取り出して並べる重複順列の総数は，n^r

2

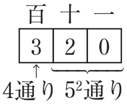
[正解] ウエオ：100

[解説]

百の位にくる数字は１～４の４通り。 [B]

[B]　百の位は「0」にならないことに注意する。

残りの位の決め方は，異なる５個のものから２個取り出して並べる重複順列の数に等しいから，5^2 通り。



よって，求める個数は，

$4\times5^2=\mathbf{100}$ **（個）**

3

[正解] カキ：54

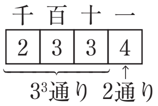
[解説]

偶数を作るには，一の位が偶数だから，

2，４の２通り。 [C]

[C]　偶数となるように一の位だけ別に考える。

残りの位の決め方は，異なる３個から３個取り出して並べる重複順列の数に等しいから，3^3 通り



よって，求める個数は，

$2\times3^3=\mathbf{54}$ **（個）**

第3講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：35

[解説]

$_7C_3=\dfrac{7\cdot6\cdot5}{3\cdot2\cdot1}$ [A]

$=35$

[A]
$_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$

2

[正解] ウエ：28

[解説]

$_8C_6={}_8C_2$ [B]

$=\dfrac{8\cdot7}{2\cdot1}=28$

[B]　$_nC_r={}_nC_{n-r}$

3

[正解] オカ：10

[解説]

$_{10}C_1=10$ [C]

[C]　$_nC_1=n$

4

[正解] キ：6，ク：2，ケコ：15

[解説]

6人の生徒から2人を選ぶ方法は，6個のものから2個を選ぶ組合せの数に等しい。

つまり，$_6C_2=\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}$ [D]

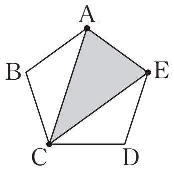
$=15$（通り）

[D]　異なる n 個のものから異なる r 個のものを取り出す組合せの総数は，
$_nC_r=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1}$
$(r\leqq n)$

5 **[正解]** サシ：10

[解説]

三角形の個数は，５個の文字から３個選ぶ組合せの数に等しい。[E]



つまり，$_5C_3 = {}_5C_2$

$$= \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = \mathbf{10}\,(\text{個})$$

[E]　３点を選べば，選んだ３点を頂点とする三角形が１つ得られる

第3講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：120

[解説]

10人の中から3人を選ぶ組合せの数に等しいから，

$$ {}_{10}C_3=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} $$ [A]

$$ =120\text{（通り）} $$

[A]
$$ {}_nC_r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)\cdots3\cdot2\cdot1} $$

2

[正解] エオ：60

[解説]

男子2人を選ぶ方法は，[B]

$ {}_6C_2 $ 通り

そのおのおのに対し，女子1人を選ぶ方法は，

$ {}_4C_1 $ 通り

よって，求める選び方の総数は，

$$ {}_6C_2\times{}_4C_1 $$ [C]

$$ =\frac{6\cdot5}{2\cdot1}\times4=60\text{（通り）} $$

[B]　男子の集団，女子の集団それぞれの選ぶ組合せを考える。

[C]　積の法則により場合の数を求める。

3 **[正解]** カキク：100

[解説]

女子が少なくとも1人含まれるような選び方は，

(全体の選び方の数)

　　－(女子が1人も含まれない選び方の数) [D]

を求める。

全体の選び方の数は，${}_{10}C_3=120$ 通り

女子が1人も含まれない選び方は，男子を3人選ぶ場合だから，

$${}_6C_3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}=20\text{(通り)}$$

よって，求める選び方の総数は，

$$120-20=\mathbf{100}\text{(通り)}$$

[D]
(全体の総数)－(起こらない場合の総数)

第 3 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：90

[解説]

6 個の玉の中から，A に入る 2 個の玉を選ぶ方法は，

$_6C_2$ 通り [A]

残り 4 個の中から，B に入る 2 個の玉を選ぶ方法は，

$_4C_2$ 通り

残りの 2 個は C に入る。これは 1 通り。

よって，求める場合の数は，

$_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1$ [B]

$= \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} \times \dfrac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \times 1 = \mathbf{90}$ **(通り)**

[A]　A，B，C の順番に，入れ方の総数を求めていく。

[B]　積の法則により場合の数を求める。

2

[正解] ウエ：15

[解説]

3 つの袋を A，B，C と区別して分ける方法

$_6C_2 \times {}_4C_2 \times 1$

のうち，袋 A，B，C の区別をなくすと同じ分け方になるものが 3! 通りずつ存在する。 [C]

よって，求める場合の数は，

$\dfrac{90}{3!} = \dfrac{90}{6} = \mathbf{15}$ **(通り)**

[C]　組に入る個数（人数）が同じ，かつ組に名前がなく区別できない組が n 組ある場合は，名前をつけて組を区別して組み分けを行い，その結果を $n!$ で割るとよい。

3 **[正解]** オカ：60

[解説]

6個の玉の中から1個選んで1つの袋に入れる方法が,

$$6\text{通り}$$

残り5個の中から2個選んで1つの袋に入れる方法が

$${}_5C_2\text{ 通り}$$

残りの3個は余った袋に入る。これは1通り。 [D]

よって，求める場合の数は,

$$6\times{}_5C_2=6\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=\mathbf{60}\,\text{(通り)}$$

[D]　袋に入る玉の数が異なるので，3つの袋は区別できる。

第 3 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：15

[解説]

6 桁の整数の個数は，1，1，2，2，2，2 を 1 列並べてできる順列の総数に等しい。つまり，

$$\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times4\cdot3\cdot2\cdot1}$$ [A]

$$=\mathbf{15}\text{(個)}$$

[A]　同じものを含む順列の総数
n 個のもののうち，p 個，q 個，r 個，……がそれぞれ同じものであるとき，これら n 個のものをすべて 1 列に並べる順列の総数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!\cdots}$$

2

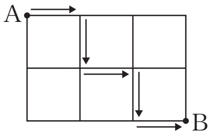
[正解] ウエ：10

[解説]

右に 1 区画進むことを→，

下に 1 区画進むことを↓

で表す。



A から B に行くときの道順は，

→ 3 個と↓ 2 個の合計 5 個の順列で表される。[B]

よって，求める道順の総数は，

$$\frac{5!}{3!2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\times2\cdot1}$$

$$=\mathbf{10}\text{(通り)}$$

[B]　最短経路の総数
→と↓の「同じものを含む順列」として扱う。例えば図の道順では，
→↓→↓→
と並べたと考える。

3

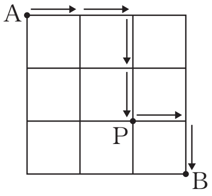
[正解] オカ：12

[解説]

A から P まで行く道順の総数は，

$$\frac{4!}{2!2!}=\frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\times2\cdot1}$$

$$=6\text{(通り)}$$ [C]



P から B まで行く道順の総数は，

2 通り

よって，求める道順の総数は，[D]

$$6\times2=\mathbf{12}\text{(通り)}$$

[C]　→を 2 個，↓を 2 個合計 4 個の，「同じものを含む順列」の総数である。

[D]　積の法則により求める。

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：3

[解説]

1 個のさいころの目の出方は，1，2，3，4，5，6 の 6 通りあり，どの場合も同様に確からしい。

このうち，5 以上の目が出る場合は 5 と 6 の 2 通りある。

よって，5 以上の目が出る確率は，

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$ [A]

[A]　確率 $P(A)$
$=\dfrac{事象Aの起こる場合の数}{起こりうるすべての場合の数}$

2 **[正解]** ウ：1，エ：5

[解説]

くじの引き方は，全部で 10 通りあり，どの場合も同様に確からしい。

このうち，当たりくじを引くのは 2 通りある。[B]

よって，当たりくじを引く確率は，

$$\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$$ [C]

[B]　2 本の当たりくじは区別して考える。

[C]　確率 $P(A)$
$=\dfrac{事象Aの起こる場合の数}{起こりうるすべての場合の数}$

3 **[正解]オ**：1，**カ**：4

[解説]

2 枚の硬貨を A，B とし，表，裏の出方を (A，B) で表す。 [D]

起こりうるすべての場合の数は,

(表，表)，(表，裏)，(裏，表)，(裏，裏)

の 4 通りあり，どの場合も同様に確からしい。

このうち, 2 枚とも裏が出るのは, (裏, 裏) の 1 通り。

よって，2 枚とも裏が出る確率は,

$$\frac{1}{4}$$

[D]　2 枚の硬貨は区別して考え，起こりうるすべての場合の数を考える。

第 4 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：5

[解説]

5 人が 1 列に並ぶ方法は，5! 通り。

このうち，A，B が隣り合う並び方は，

A，B をまとめて 1 人とみなし，4 人の並び方は，

4! 通り

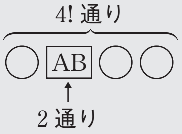
A と B の順列が 2 通りあるから，

$$4!\times 2\text{（通り）}$$ [A]

よって，求める確率は，

$$\frac{4!\times 2}{5!}=\frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\times 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=\frac{2}{5}$$ [B]

[A]



隣り合うものを1つとみなして考える。

[B]　確率 $P(A)$

$$=\frac{\text{事象}A\text{の起こる場合の数}}{\text{起こりうるすべての場合の数}}$$

2

[正解] ウ：2，エ：7

[解説]

起こりうるすべての場合の数は，7 個の玉から 2 個を取り出す組合せだから，

$${}_7C_2\left(=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}=21\right)\text{（通り）}$$

このうち，2 個とも白玉が出るのは，

$${}_4C_2\left(=\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1}=6\right)\text{（通り）}$$ [C]

よって，求める確率は，

$$\frac{{}_4C_2}{{}_7C_2}=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$$

[C]　4 個の白玉から 2 個を取り出す組合せの数。

3 **[正解]** オ：4，カ：7

[解説]

起こりうるすべての場合の数は，7 個の玉から 2 個を取り出す組合せだから，

$$ {}_7C_2\left(=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}=21\right)(\text{通り}) $$

このうち，赤玉 1 個，白玉 1 個が出るのは，

$$ {}_3C_1\times{}_4C_1\,(=3\times4=12)(\text{通り}) $$ [D]

[D]　赤玉，白玉，それぞれ 1 個取り出す組合せの数。

よって，求める確率は，

$$ \frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{{}_7C_2}=\frac{12}{21}=\boldsymbol{\frac{4}{7}} $$

第 4 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：6

[解説]

起こりうるすべての場合の数は，

$${}_{10}\mathrm{C}_3\left(=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120\right)(\text{通り})$$

取り出した 3 枚のカードに書かれた数がすべて偶数であるという事象を A，すべて奇数であるという事象を B とすると，A と B は互いに排反である。 [A]

事象 A の起こる場合の数は，

$${}_5\mathrm{C}_3=\left({}_5\mathrm{C}_2=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10\right)(\text{通り})$$ [B]

事象 B の起こる場合の数は，同様に，10 通り [C]

よって，$P(A)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{12}$，$P(B)=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\dfrac{1}{12}$

求める確率は，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$ [D]

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

[A]　A と B は同時に起こることはない。→ A と B は互いに排反

[B]　偶数のカード 5 枚の中から 3 枚取り出す組合せの数

[C]　10 枚の中に偶数も奇数も 5 枚ずつある。

[D]　事象 A と B が互いに排反のとき，確率の加法定理が成り立つ。

2 **[正解]** ウ：1，エ：2

[解説]

取り出した 3 枚のカードに書かれた数の和が偶数になるのは，次の 2 つの場合がある。

(i) 3 枚に書かれた数がすべて偶数

(ii) 3 枚に書かれた数のうち，1 枚が偶数で 2 枚が奇数

(i)の事象を A，(ii)の事象を C とすると，

A と C は互いに排反である。 [E]

事象 A の起こる確率は

$$P(A)=\frac{{}_5\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{10}{120}=\frac{1}{12}$$

事象 C の起こる確率は，

$$P(C)=\frac{{}_5\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{50}{120}=\frac{5}{12}$$ [F]

よって，求める確率は，

$$P(A\cup C)=P(A)+P(C)$$ [G]

$$=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

[E]　A と C は同時に起こることがない。

[F]　5 枚の偶数から 1 枚，5 枚の奇数から 2 枚を引く。

[G]　事象 A と C が互いに排反のとき，確率の加法定理が成り立つ。

第 4 講　PART4 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：7，イウ：10

[解説]

左端が男子であるという事象を A,

右端が女子であるという事象を B

とすると，求める確率は $P(A\cup B)$ である。[A]

ここで，左端が男子である確率は，

$$P(A)=\frac{3\times4!}{5!}=\frac{3}{5}$$

右端が女子である確率は，

$$P(B)=\frac{2\times4!}{5!}=\frac{2}{5}$$

また，$A\cap B$ は左端が男子で右端が女子であるという事象であるから，[B]

$$P(A\cap B)=\frac{3\times2\times3!}{5!}=\frac{3\cdot2}{5\cdot4}=\frac{3}{10}$$

よって，求める確率は，

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$ [C]

$$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{3}{10}=\mathbf{\frac{7}{10}}$$

[A]　事象を設定して考えるとわかりやすい。

[B]　A と B は排反ではないことに注意する。

[C]　和事象の確率
$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

2 [正解] エオ：14，カキ：15

[解説]

2枚引くとき，引いたカードに書かれた数の和が5になるという事象をCとすると，求める確率は$P(\overline{C})$である。[D]

起こりうるすべての場合の数は，

$${}_{16}C_2=\frac{16\cdot15}{2\cdot1}=120\text{（通り）}$$

事象Cの起こる場合の数は，引いたカードが1と4，2と3の場合がそれぞれ4通りずつあるから，

$$4\times2=8\text{（通り）}$$

よって，$P(C)=\frac{8}{120}=\frac{1}{15}$

求める確率は，

$$P(\overline{C})=1-P(C) \quad \text{[E]}$$

$$=1-\frac{1}{15}=\mathbf{\frac{14}{15}}$$

> [D]　和が5にならない
> ↓　余事象
> 和が5になる

> [E]　$P(C)+P(\overline{C})=1$ より，
> $P(\overline{C})=1-P(C)$

3 [正解] クケ：23，コサ：30

[解説]

2枚引くとき，少なくとも1枚は赤いカードであるという事象をDとすると，Dの余事象は，

「引いたカードがどちらも青いカードである」

という事象になる。[F]

$\overline{D}$ の起こる場合の数は，

$${}_{8}C_2=\frac{8\cdot7}{2\cdot1}=28\text{（通り）}$$

よって，$P(\overline{D})=\frac{28}{120}=\frac{7}{30}$

求める確率は，

$$P(D)=1-P(\overline{D}) \quad \text{[G]}$$

$$=1-\frac{7}{30}=\mathbf{\frac{23}{30}}$$

> [F]　少なくとも1枚は赤いカード
> ↓　余事象
> 2枚とも青いカード

> [G]　D よりも $\overline{D}$ の方が求めやすいときに余事象の確率
> $(P(D)=1-P(\overline{D}))$ を使うとよい。

第 5 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：6

[解説]

1 回目に偶数の目が出る確率は，

$$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

2 回目に 5 以上の目が出る確率は，

$$\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

さいころを投げる試行は独立だから，求める確率は，

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\boldsymbol{\frac{1}{6}}$$ [A]

> [A]　独立な試行の確率
> 2 つの試行 S，T が独立であるとき，S では事象 A，T では事象 B が起こる確率 p は，
> $p=P(A)\times P(B)$

2

[正解] ウエ：11，オカ：36

[解説]

「少なくとも 1 回は 6 の目が出る」

という事象を A とすると，この余事象 $\overline{A}$ は，

「2 回とも 6 以外の目が出る」となる。 [B]

つまり $P(\overline{A})$ は，2 回とも 1 ～ 5 までの目が出る確率だから，

$$P(\overline{A})=\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{25}{36}$$

よって，求める確率は，

$$P(A)=1-P(\overline{A})$$ [C]

$$=1-\frac{25}{36}=\boldsymbol{\frac{11}{36}}$$

> [B]　「少なくとも 1 回は～出る」の余事象は，「1 回も～出ない」
> (「2 回とも 6 の目が出ない」)

> [C]　余事象の確率

3 **[正解]** キ：1，ク：2

[解説]

取り出した3個の玉の中に赤玉が1個だけ含まれるのは，次の〔1〕，〔2〕のいずれかである。 [D]

〔1〕袋Aから赤玉1個，白玉1個を取り出し，袋Bから白玉を取り出す。

〔2〕袋Aから白玉2個を取り出し，袋Bから赤玉を取り出す。

〔1〕において，

袋Aから赤玉1個，白玉1個を取り出す確率は，

$$\frac{1\times{}_3C_1}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

よって，〔1〕の確率は，$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ [E]

〔2〕において，

袋Aから白玉2個を取り出す確率は，

$$\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

よって，〔2〕の確率は，$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{6}$

〔1〕，〔2〕は互いに排反であるから，求める確率は，

[F]

$$\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{2}}$$

[D]　排反な2つの事象に分ける。

[E]　2つの試行は独立なので，それぞれの確率をかけて求める。(独立な試行の確率)

[F]　〔1〕と〔2〕の事象は互いに排反なので，それぞれの確率を加える。(確率の加法定理)

第5講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：25，ウエ：72

[解説]

さいころを1回投げるとき，6の目が出る確率は，

$\dfrac{1}{6}$ である。

3回投げるとき，6の目がちょうど1回出る確率は，

$${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2=3\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{25}{36}=\mathbf{\frac{25}{72}}$$ [A]

[A]　反復試行の確率
1回の試行で事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回繰り返し行う反復試行で，A がちょうど r 回起こる確率は，
$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$$

2

[正解] オ：8，カキ：27

[解説]

さいころを1回投げるとき，1または2の目が出る確率は，$\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

4回投げるとき，1または2の目がちょうど2回出る確率は，

$${}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^2=6\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{9}=\mathbf{\frac{8}{27}}$$ [B]

[B]　反復試行の確率
$${}_n\mathrm{C}_r p^r(1-p)^{n-r}$$

3 [正解] ク：3，ケコ：16

[解説]

さいころを１回投げるとき，偶数の目が出る確率は，

$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ である。

５回投げるとき，偶数の目が４回以上出るのは，次の〔1〕，〔2〕のいずれかである。 [C]

〔1〕偶数の目がちょうど４回出る確率は，

$${}_5C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^1=5\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$$

〔2〕偶数の目がちょうど５回出る確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$$

〔1〕，〔2〕は互いに排反であるから，求める確率は，

[D]

$$\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=\frac{6}{32}=\mathbf{\frac{3}{16}}$$

[C]　排反な事象に分けて，それぞれ確率を求める。

[D]　〔1〕と〔2〕の事象は互いに排反なので，それぞれの確率を加える。
（確率の加法定理）

第6講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1，イ：3

[解説]

1回目に当たりくじを引くという事象を A，2回目に当たりくじを引くという事象を B とする。

求める確率は，$\overline{A}$ が起こったときの B が起こる条件付き確率である。

2回目の試行では，9本のくじの中に当たりくじが3本あるから，[A]

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{3}{9}=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

[A]　1回目の試行が終わったあとでの確率を考える。
$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{n(\overline{A}\cap B)}{n(\overline{A})}$$

2

[正解] ウ：1，エオ：15

[解説]

1回目に当たりくじを引くという事象を A，2回目に当たりくじを引くという事象を B とする。

事象 A の起こる確率は，$P(A)=\dfrac{3}{10}$

事象 A が起こったときに B が起こる条件付き確率は，

$$P_A(B)=\frac{2}{9}$$ [B]

よって，求める確率は，

$$P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)$$ [C]

$$=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\mathbf{\frac{1}{15}}$$

[B]　1回目に当たりくじを引いているので，2回目には，9本の中に当たりくじが2本ある。

[C]　確率の乗法定理
$P(A\cap B)=P(A)P_A(B)$

3 **[正解]** **カ**：3，**キク**：10

[解説]

1回目に当たりくじを引くという事象を A，2回目に当たりくじを引くという事象を B とする。

2回目に当たりくじを引くのは，次の〔1〕，〔2〕のいずれかである。

〔1〕1回目，2回目とも当たりくじを引く確率は，

$$P(A\cap B)=\frac{1}{15}$$

〔2〕1回目にはずれくじを引き，2回目に当たりくじを引く確率は，

$$P(\overline{A}\cap B)=P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B) \quad \text{[D]}$$

$$=\frac{7}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{30}$$

[D]　求める確率は $P(\overline{A}\cap B)$ である。確率の乗法定理より求める。（2つの試行は独立でない。）

〔1〕，〔2〕は互いに排反であるから，求める確率は，

$$\frac{1}{15}+\frac{7}{30}=\frac{9}{30}=\mathbf{\frac{3}{10}}$$

第6講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：3

[解説]

取り出した2個の玉に含まれる赤玉の個数は，

0，1，2個のいずれかである。

赤玉が0個となる確率は $\dfrac{{}_4C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{6}{15}$

赤玉が1個となる確率は $\dfrac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{{}_6C_2}=\dfrac{8}{15}$

赤玉が2個となる確率は $\dfrac{{}_2C_2}{{}_6C_2}=\dfrac{1}{15}$

したがって，求める赤玉の個数の期待値は，[A]

$$0\times\frac{6}{15}+1\times\frac{8}{15}+2\times\frac{1}{15}\quad\text{[B]}$$

$$=\frac{1}{15}(0\times6+1\times8+2\times1)=\mathbf{\frac{2}{3}}\ (\text{個})$$

[A] 変量 X のとりうる値を x_1，x_2，x_3，…，x_n とし，X がこれらの値をとる確率を，p_1，p_2，p_3，……，p_n $(p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n=1)$ とするとき，

$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$

を変量 X の期待値という。

[B] (変量)×(確率) の和で求める。

2

[正解] ウエオ：200，カ：3

[解説]

もらえる金額 X と確率は以下の通り。

X	0	100	200	計
確率	$\frac{6}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{15}$	1

[C]

したがって，求める金額の期待値は，

$$0\times\frac{6}{15}+100\times\frac{8}{15}+200\times\frac{1}{15}\quad\text{[D]}$$

$$=\frac{1}{15}(0\times6+100\times8+200\times1)=\mathbf{\frac{200}{3}}\ (\text{円})$$

[C]

赤玉が0個となる確率は $\dfrac{6}{15}$

赤玉が1個となる確率は $\dfrac{8}{15}$

赤玉が2個となる確率は $\dfrac{1}{15}$

[D] (変量)×(確率) の和で求める。

第 7 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

AD は ∠A の二等分線であるから，

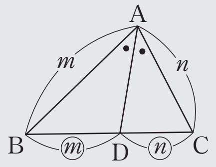
$$\mathrm{BD} : \mathrm{DC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$ [A]

$$= 2 : 3$$

よって，

$$\mathrm{BD} = \frac{2}{5}\mathrm{BC} = \frac{2}{5} \times 5 = \mathbf{2}$$

[A]　△ABC において，
AD が ∠A の二等分線のとき，



BD : DC = AB : AC

2

[正解] イ：5

[解説]

AE は ∠A の外角の二等分線であるから，

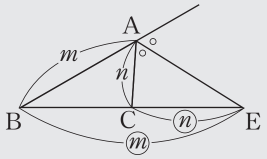
$$\mathrm{BE} : \mathrm{EC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$ [B]

$$= 2 : 1$$

よって，BC : CE = 1 : 1 であるから，

$$\mathrm{CE} = \mathbf{5}$$

[B]　△ABC において，
AE が ∠A の外角の二等分線のとき，



BE : EC = AB : AC

3 **[正解]** ウエ：20，オ：3

[解説]

AD は ∠A の二等分線であるから，[C]

$$BD : DC = AB : AC$$
$$= 2 : 1$$

よって，

$$DC = \frac{1}{3}BC = \frac{1}{3} \times 5 = \frac{5}{3}$$

AE は ∠BAC の外角の二等分線であるから，[D]

$$BE : EC = AB : AC$$
$$= 2 : 1$$

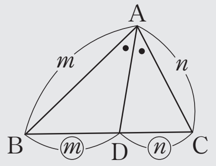
よって，BC：CE＝1：1 であるから，

$$CE = 5$$

以上により，

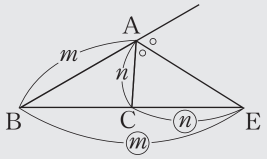
$$DE = DC + CE = \frac{5}{3} + 5$$
$$= \mathbf{\frac{20}{3}}$$

[C]　△ABC において，
AD が ∠A の二等分線のとき，



BD：DC＝AB：AC

[D]　△ABC において，
AE が ∠A の外角の二等分線のとき，

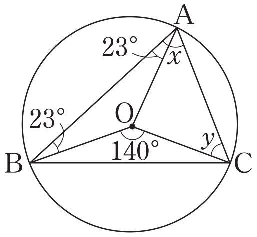


BE：EC＝AB：AC

第 7 講　PART2 確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：70，ウエ：47

[解説]



外心 O は △ABC の外接円の中心であるから，[A]

$$x = \frac{1}{2}\angle \mathrm{BOC} \quad \text{[B]}$$

$$= \frac{1}{2} \times 140^\circ = \mathbf{70}^\circ$$

また，△OAB，△OAC は二等辺三角形であるから

$$\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{OBA} = 23^\circ$$

$$\angle \mathrm{OAC} = \angle \mathrm{OCA} = y$$

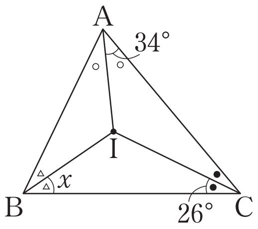
$$y = \angle \mathrm{OAC} = 70^\circ - 23^\circ = \mathbf{47}^\circ$$

[A]　三角形の外心
3 辺の垂直二等分線の交点。
外接円をかき，半径や円周角，中心角を意識するとよい。

[B]　円周角は，中心角の $\frac{1}{2}$ である。

2 **[正解]** オカ：30

[解説]



点Iは内心であるから，AI，BI，CIはそれぞれの内角の二等分線である。 [C]

三角形の内角の和は180°であるから，

$2x+34°\times2+26°\times2=180°$

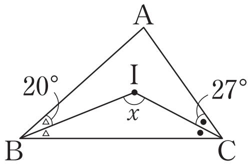
$2x+120°=180°$

$x=$ **30°**

> [C]　三角形の内心
> 3つの内角の二等分線の交点。
> 角の二等分線を意識し，等しい角に注目するとよい。

3 **[正解]** キクケ：133

[解説]



BI，CIはそれぞれ内角の二等分線であるから， [D]

$\angle IBC=20°$

$\angle ICB=27°$

△IBCの内角の和を考えて，

$\angle x=180°-(20°+27°)$

$=$ **133°**

> [D]　三角形の内心
> 3つの内角の二等分線の交点。
> 角の二等分線を意識し，等しい角に注目するとよい。

第 7 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：4

[解説]

点 D は辺 BC の中点であるから，[A]

$BD = CD$

よって，$x = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2} \times 10 = \mathbf{5}$

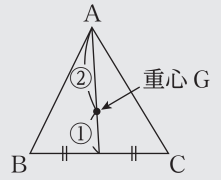
点 G は中線 AD を 2：1 に内分するから，[A]

$AG : GD = 2 : 1$

よって，$y : 2 = 2 : 1$

$y = 2 \times 2 = \mathbf{4}$

> [A]　三角形の重心
> 三角形の 3 本の中線の交点
> ・中線を 2：1 に内分する点である。
> ・三角形の重心と頂点を結ぶ直線は，その頂点の対辺の中点を通る。



2

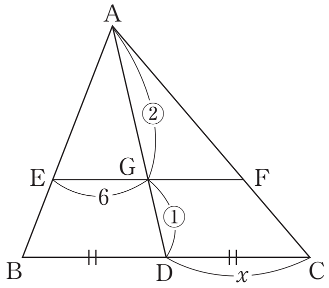
[正解] ウ：9

[解説]

点 G は中線 AD を 2：1 に内分するから，[B]

$AG : GD = 2 : 1$

> [B]　三角形の重心は，中線を 2：1 に内分する点である。



△ABD において，

$EG : BD = AG : AD$ [C]

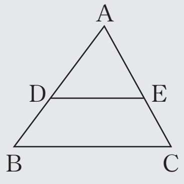
$= 2 : 3$

よって，

$BD = \frac{3}{2}EG = \frac{3}{2} \times 6 = 9$

$CD = BD$ であるから，$x = \mathbf{9}$

> [C]　平行線と比
> △ABC で，DE // BC のとき，
> AD：AB＝DE：BC

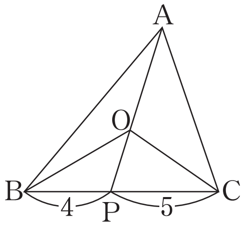


第 7 講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：5

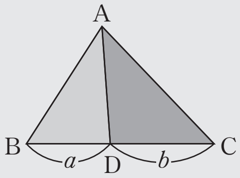
[解説]



$$\frac{\triangle ABP}{\triangle ACP}=\frac{BP}{CP}=\frac{4}{5}$$ [A]

よって，$\triangle ABP:\triangle ACP=\mathbf{4:5}$

[A]　三角形の面積と線分の比
高さが等しいならば，
（面積比）＝（底辺の比）

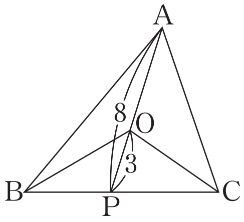


$$\frac{\triangle ABD}{\triangle ACD}=\frac{BD}{CD}=\frac{a}{b}$$

2

[正解] ウ：3，エ：8

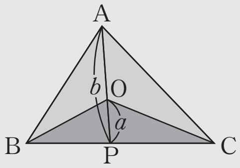
[解説]



$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OP}{AP}=\frac{3}{8}$$ [B]

よって，$\triangle OBC:\triangle ABC=\mathbf{3:8}$

[B]　三角形の面積と線分の比
底辺が等しいならば，
（面積比）＝（高さの比）

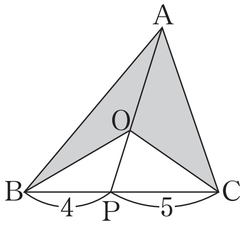


$$\frac{\triangle OBC}{\triangle ABC}=\frac{OP}{AP}=\frac{a}{b}$$

3

[正解] オ：4，カ：5

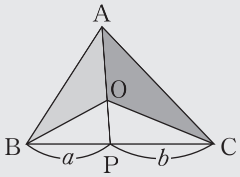
[解説]



$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}=\frac{BP}{CP}=\frac{4}{5}$$ [C]

よって，$\triangle OAB:\triangle OAC=\mathbf{4:5}$

[C]　三角形の面積と線分の比
底辺が等しいならば，
（面積比）＝（高さの比）



$$\frac{\triangle OAB}{\triangle OAC}=\frac{BP}{CP}=\frac{a}{b}$$

第 7 講　PART5 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：8，イ：9

[解説]

チェバの定理より，[A]

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

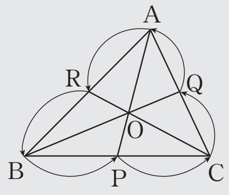
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{2}=1$$

$$\frac{BP}{PC}=\frac{8}{9}$$

よって，

$$BP:PC=\mathbf{8}:\mathbf{9}$$

[A]　チェバの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

2 **[正解]** ウ：3，エ：4

[解説]

メネラウスの定理より，[B]

$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

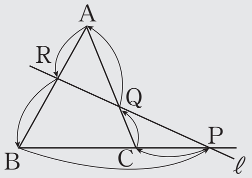
$$\frac{8}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

$$\frac{AR}{RB}=\frac{3}{4}$$

よって，

$$AR:RB=\mathbf{3}:\mathbf{4}$$

[B]　メネラウスの定理



$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}\cdot\frac{AR}{RB}=1$$

3 **[正解]** **オ**：2，**カ**：3

[解説]

メネラウスの定理より，

$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$ [C]

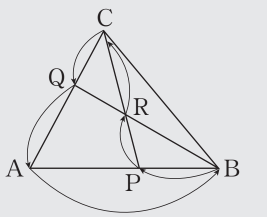
$$\frac{10}{4}\cdot\frac{PR}{RC}\cdot\frac{3}{5}=1$$

$$\frac{PR}{RC}=\frac{2}{3}$$

よって，

$$PR：RC=\mathbf{2}：\mathbf{3}$$

[C]



$$\frac{AB}{BP}\cdot\frac{PR}{RC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1$$

第 7 講　PART6 確認問題 解答

1　[正解] ア：②

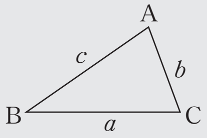
[解説]

$a=8$，$b=3$，$c=5$ とすると，a が最大で，

$a=b+c$ だから，$a<b+c$ を満たさない。 [A]

よって，三角形は**存在しない**。

> [A]　正の数 a，b，c において，
> a，b，c を３辺とする三角形が存在する $\iff |b-c|<a<b+c$



2　[正解] イ：①

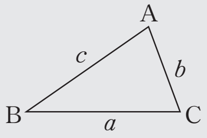
[解説]

$a=10$，$b=4$，$c=7$ とすると，a が最大で，

$10<4+7$ より，$a<b+c$ は成り立つ。 [B]

よって，三角形は**存在する**。

> [B]　正の数 a，b，c において，a が最大のときは，$a<b+c$ が成り立てば三角形が存在する。

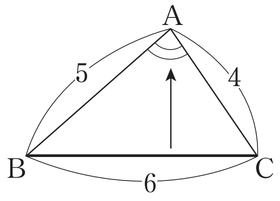


3　[正解] ウ：①

[解説]

$\mathrm{CA}<\mathrm{AB}<\mathrm{BC}$ より，

最大辺 BC の対角である $\angle\mathbf{A}$ が最大角。 [C]



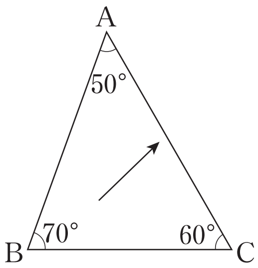
> [C]　三角形において，辺の大小とその対角の大小は一致する。

4 ［正解］エ：③

［解説］

最大角に対する辺が最も大きい。 [D]

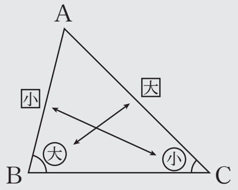
$$\angle C = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$$



$\angle A < \angle C < \angle B$ より，

最大角は $\angle B$ であるから，最大辺は，**CA**

［D］　三角形において，角の大小とその対辺の大小は一致する。



第8講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイウ：100，エオ：70

[解説]

円に内接する四角形の対角の和は180°であるから，

[A]

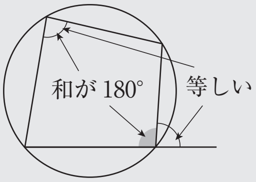
$$x+80^\circ=180^\circ$$

$$x=\mathbf{100^\circ}$$

$$y+110^\circ=180^\circ$$

$$y=\mathbf{70^\circ}$$

[A]　円に内接する四角形
① （対角の和）＝ 180°
② （ある内角）＝（その対角の外角）



2

[正解] カキ：50，クケ：50

[解説]

円周角と中心角の関係から，

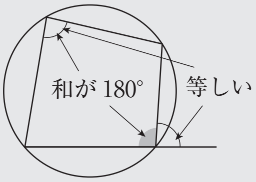
$$x=100^\circ\times\frac{1}{2}=\mathbf{50^\circ}$$ [B]

円に内接する四角形の内角は，その対角の外角に等しいから，[C]

$$y=x=\mathbf{50^\circ}$$

[B]　円周角は，中心角の $\frac{1}{2}$ となる。

[C]　円に内接する四角形
① （対角の和）＝ 180°
② （ある内角）＝（その対角の外角）



3 [正解] コ：②

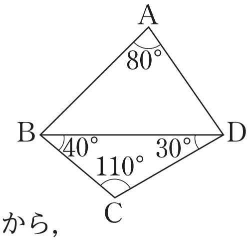
[解説]

① $\angle C = 180° - (40° + 30°)$

$= 110°$

$\angle A + \angle C = 80° + 110°$

$= 190°$ [D]



$\angle A + \angle C = 180°$ でないから，

この四角形 ABCD は，円に内接しない。

② $\angle BAD = 180° - 75°$

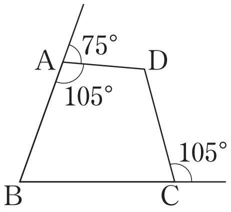
$= 105°$ [E]

∠BAD の対角の外角が

105° であるから，[D]

この四角形 ABCD は，

円に内接する。

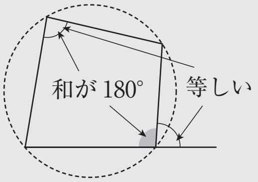


[D]　四角形が円に内接する条件

(i)　(1 組の対角の和) = 180°

(ii)　(ある内角)

　=(その対角の外角)



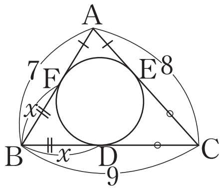
[E]　四角形 ABCD の ∠A の内角の大きさを調べる。

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：4

[解説]



[A]

$\mathrm{BF}=\mathrm{BD}=x$

$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=7-x$

$\mathrm{CE}=\mathrm{CD}=9-x$

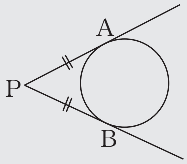
$\mathrm{AC}=\mathrm{AE}+\mathrm{CE}$ より，

$(7-x)+(9-x)=8$

$16-2x=8$

$x=4$

[A]　接線の長さ



円外の 1 点からその円に引いた 2 本の接線について，2 つの接線の長さは等しい。

$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$

2

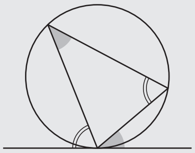
[正解] イウ：60，エオ：50

[解説]

接線と弦のつくる角の定理から，[B]

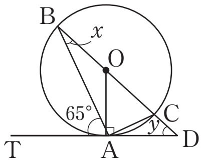
$\angle x=60^\circ$，$\angle y=50^\circ$

[B]　接線と弦の作る角の定理
円の接線とその接点を通る弦の作る角は，その角の内部にある弧に対する円周角に等しい。



3 [正解] カキ：25，クケ：40

[解説]



[C]

線分 OA を引くと，

$OA \perp TD$ [C]

△OAB において，OA＝OB であるから，

$x = \angle OAB$

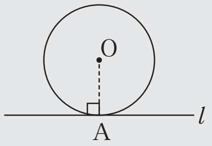
$= 90° - 65° = \mathbf{25°}$

△ABD の内角と外角の関係から，[D]

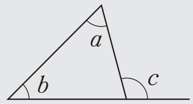
$25° + y = 65°$

$y = \mathbf{40°}$

[C]　円 O の接線 l は $OA \perp l$ が成り立つ。



[D]　三角形の内角と外角の関係



$a + b = c$

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4

[解説]

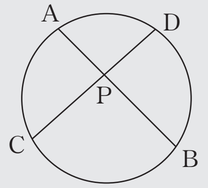
方べきの定理より，[A]

$$\mathrm{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

$$6 \cdot 2 = 3 \cdot x$$

$$x = 4$$

[A]　方べきの定理



$\mathrm{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

2 **[正解]** イ：4

[解説]

方べきの定理より，[B]

$$\mathrm{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

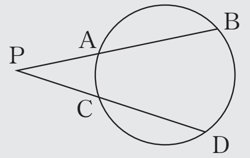
$$x(x+2) = 3 \cdot (3+5)$$

$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

$$(x-4)(x+6) = 0$$

$x > 0$ より，$x = 4$

[B]　方べきの定理



$\mathrm{PA \cdot PB = PC \cdot PD}$

3 **[正解]** ウ：6

[解説]

方べきの定理より，[C]

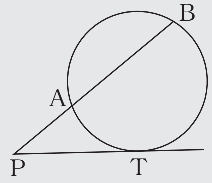
$$\mathrm{PA \cdot PB = PT^2}$$

$$4 \cdot (4+5) = x^2$$

$$x^2 = 36$$

$x > 0$ より，$x = 6$

[C]　方べきの定理



$\mathrm{PA \cdot PB = PT^2}$

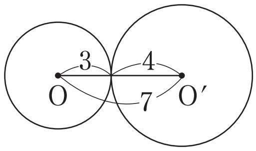
第 8 講　PART4 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：①

[解説]

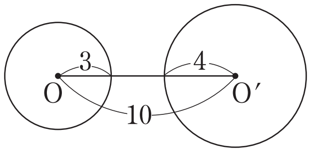
$d=7$ のとき，$d=3+4$ であるから，

2 円は**外接する**。 [A]

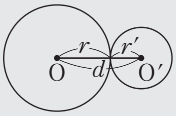


$d=10$ のとき，$d>3+4$ であるから，

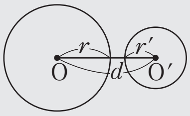
2 円は**互いに外部にある**。 [B]



[A]　$d=r+r'$ のとき，2 円は外接する。



[B]　$d>r+r'$ のとき，2 円は互いに外部にある。

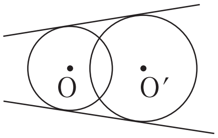


2 [正解] ウ：2，エ：4

[解説]

$d=5$ のとき，$4-3<d<4+3$ であるから，

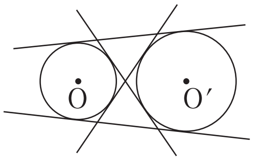
2 円は 2 点で交わる。 [C]



図のように，共通接線は，**2 本**。 [D]

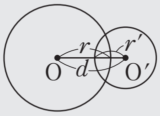
$d=8$ のとき，$d>3+4$ であるから，

2 円は，互いに外部にある。



図のように，共通接線は，**4 本**。

[C]　$r>r'$，$r-r'<d<r+r'$ のとき，2 円は 2 点で交わる。

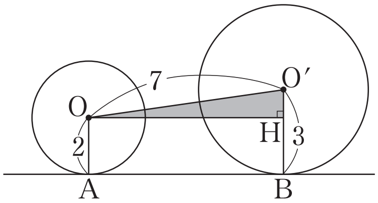


[D]　共通接線の本数
2 円の位置関係によって決定する。
　互いに外部にある　4 本
　外接する　3 本
　2 点で交わる　2 本
　内接する　1 本
　一方が他方の内部にある　0 本

3 [正解] オ：4，カ：3

[解説]

中心 O から O′B に垂線 OH を引く。



直角三角形 OHO′ において，$OO'=7$，

$O'H=3-2=1$ であるから，

$$OH=\sqrt{7^2-1^2}$$ [E]

$$=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

四角形 OABH は長方形であるから， [F]

$$AB=OH=4\sqrt{3}$$

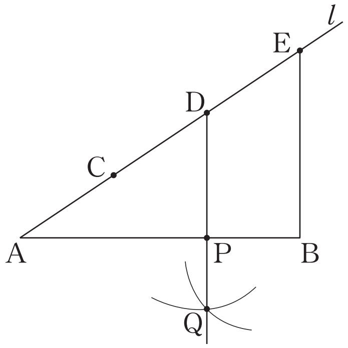
[E]　直角三角形 OHO′ で三平方の定理を使う。

[F]　$OA\perp AB$，$O'B\perp AB$ だから，四角形 OABH の内角はすべて 90° となる。

第8講　PART5 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：⑤，ウ：④

[解説]



① 点Aを通り，直線ABと異なる直線 l を引く。

② l 上に AD：DE＝2：1 となるような点C，D，E をこの順にとる。

このとき，点Dを通り直線BEに平行な直線を引き，線分ABとの交点をPとすると，

AP：PB＝AD：DE＝2：1 [A]

であるから点Pが求める点であり，以下の方法で求める。 [B]

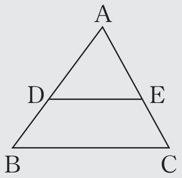
⑴ 線分BEを引く。

⑵ 点**D**を中心として，半径BEの円をかく。

⑶ 点Bを中心として，半径**AC**(DE)の円をかき，⑵の円との交点をQとする。

⑷ 2点**D**，Qを通る直線を引き，線分ABとの交点をPとする。

[A]　△ABC で，DE // BC のとき，AD：DB＝AE：EC



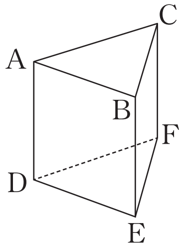
[B]　平行線の作図
四角形DQBEが平行四辺形になるような点Qを作図で求める

第 9 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]



四角形 ADEB は長方形であるから，

$AB \perp AD$，$AB \perp BE$

また，CF を平行移動して AD に重ねることができるので，$AB \perp CF$ [A]

よって，辺 AB と垂直な辺は，

辺 AD，BE，CF

[A]　2 直線 AB，CF のなす角は，2 直線 AB，AD のなす角に等しい。「垂直」という場合，2 直線が交わらない場合も含む。

2

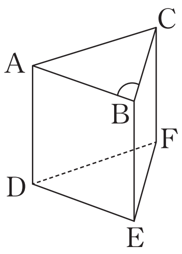
[正解] イウ：60

[解説]

EF を平行移動して BC に重ねることができるので，2 直線 AB，EF のなす角は，2 直線 AB，BC のなす角に等しい。

このなす角 θ のうち，$0° \leqq \theta \leqq 90°$ であるものは $\angle ABC$ である。 [B]

すなわち，$\theta = \mathbf{60°}$



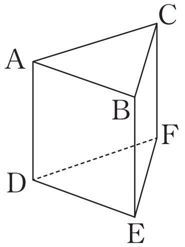
[B]　△ABC は正三角形だから，1 つの内角は 60° である。

3 **[正解]** エ：④

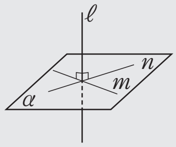
[解説]

AD ⊥ AB，AD ⊥ AC より，[C]
直線 AD は平面 ABC 上の 2 直線 AB，AC に垂直であるから，直線 AD は平面 ABC に垂直である。
同様に，AD ⊥ DE，AD ⊥ DF より，直線 AD は平面 DEF に垂直である。よって, 辺 AD と垂直な面は，

面 ABC，DEF



[C]　直線 ℓ が，平面 α 上の交わる 2 直線 m，n に垂直ならば，直線 ℓ は平面 α に垂直である。

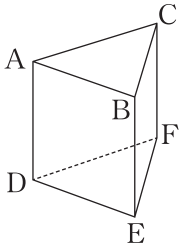


4 **[正解]** オ：③

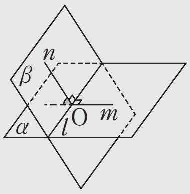
[解説]

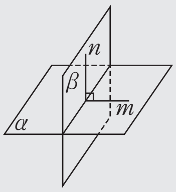
AD ⊥ AB，AD ⊥ AC より，平面 ABC と辺 AD は垂直。
よって，辺 AD を含む平面 ADEB，ADFC は面 ABC に垂直。[D]
同様に，面 ABC と辺 CF は垂直であり，辺 CF を含む平面 BEFC(，面 ADFC) は面 ABC に垂直。
したがって，求める面は

面 ADEB，ADFC，BEFC



[D]　2 平面 α，β から交線に垂直に引いた 2 直線のなす角が垂直ならば，$\alpha \perp \beta$ である。また，平面 α に垂直な直線を含む平面は，α に垂直である。



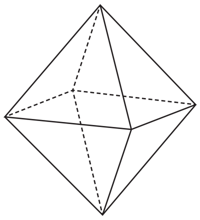


第9講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：4，ウ：6

[解説]



1つの面の形は**正三角形**であり，どの頂点にも**4個**の面が集まっている。[A]

また，正多面体の頂点の数は，

$$(1\text{つの面の頂点の数})\times(\text{面の数})\div\left(\begin{array}{l}1\text{つの頂点に}\\ \text{集まる面の数}\end{array}\right)$$

より，

$$v=\frac{3\times 8}{4}=\mathbf{6}$$

[A]　正多面体は，以下の2つの条件を満たす。
① どの面もすべて合同な正多角形である。
② どの頂点にも同じ数の面が集まっている。

2

[正解] エオ：12，カ：8

[解説]

v，f はそれぞれ，

$v=6$ [B]

$f=8$

オイラーの多面体定理より，[C]

$v-e+f=2$

$6-e+8=2$

$e=\mathbf{12}$

[B]　正八面体の頂点の数は6

[C]　オイラーの多面体定理
多面体の頂点の数を v，辺の数を e，面を数を f とすると，
$v-e+f=2$

第10講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イウ：11

[解説]

$77=1\cdot 77,\ 7\cdot 11$ [A]

よって，77 の正の約数は，

1，**7**，**11**，77

[A]　2 つの数の積の形をつくる。

2

[正解] エオ：50，カキ：75，クケコ：100

[解説]

25 の正の倍数を小さい方から順に 4 個求めると，

$25\times 1,\ 25\times 2,\ 25\times 3,\ 25\times 4$ [B]

すなわち，

25，**50**，**75**，**100**

[B]　25 の倍数は 25×(整数) の形で表される数。

3

[正解] サ：4

[解説]

2345□が 2 の倍数となるのは，一の位が偶数になるときであるから，[C]

□＝0，2，4，6，8

2345□が 3 の倍数となるのは，各位の数の和が 3 の倍数のときである。[D]

各位の数の和は，2＋3＋4＋5＋□＝14＋□

これが 3 の倍数になるのは，□＝1，4，7

よって，求める数は，**4**

[C]　2 の倍数…「一の位」が 2 の倍数（偶数）

[D]　3 の倍数…「各位の数の和」が 3 の倍数

第10講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：15

[解説]

$\sqrt{60n}$ が自然数となるのは，$60n$ が平方数のときである。 [A]

60 を素因数分解すると，

$$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

よって，求める最小の自然数は，

$$n = 3 \cdot 5 = \mathbf{15}$$ [B]

[A]　自然数 N が平方数（ある整数の 2 乗で表される数）になるのは，N のすべての素因数の個数が偶数個のときである。

[B]　$2^2 \cdot 3 \cdot 5$ に $3 \cdot 5$ を掛ければ，$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2$ となる。

2

[正解] ウエ：12

[解説]

84 を素因数分解すると，

$$84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$$

よって，84 の正の約数の個数は， [C]

$$(2+1)(1+1)(1+1) = \mathbf{12}\text{（個）}$$

[C]　ある自然数が $N = p^a q^b r^c \cdots\cdots$ と素因数分解されるとき，N の正の約数の個数は，
$(a+1)(b+1)(c+1)\cdots\cdots$

第10講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] アイ：18，ウエオ：540

[解説]

それぞれの数を素因数分解すると，

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

よって，最大公約数は，[A]

$$2 \cdot 3^2 = \mathbf{18}$$

最小公倍数は，[B]

$$2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 = \mathbf{540}$$

[A]　最大公約数
共通な素因数のうち，指数が最小のものの積を求める。

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$54 = 2 \cdot 3^3$$
$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

↑ 2　↑ 3^2

[B]　最小公倍数
すべての素因数のうち，指数が最大のものの積を求める。

$$36 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$54 = 2 \cdot 3^3$$
$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

↑ 2^2　↑ 3^3　↑ 5

2

[正解] カ：1，キクケコ：6930

[解説]

それぞれの数を素因数分解すると，

$$63 = 3^2 \cdot 7$$

$$110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$$

よって，共通な素因数はないから，[C]

最大公約数は，**1**

最小公倍数は，[D]

$$63 \cdot 110 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = \mathbf{6930}$$

[C]　2 つの整数 a，b について，共通な素因数がないとき，a と b は互いに素であるという。
このとき，2 つの整数 a，b の最大公約数は 1 である。
63 と 110 は互いに素である。

[D]　最小公倍数は，2 数の積である。

第10講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] ア：7

[解説]

整数 a，b は整数 k，l を用いて次のように表すことができる。

$a=8k+2$，$b=8l+5$ [A]

$a+b=(8k+2)+(8l+5)$

$=8k+8l+7$

$=8(k+l)+7$ [B]

よって，$a+b$ を 8 で割ったときの余りは，

7

[A]　除法の原理
整数 a を，正の整数 b で割ったときの商を q，余りを r とすると，
$a=bq+r$（$0\leqq r<b$）
であり，これを満たす q，r がただ 1 通りに定まる。

[B]　$a+b$ を，
$8\times$(整数)$+r$（$0\leqq r<8$）
の形に変形する。

2

[正解] イ：2

[解説]

整数 a，b は整数 k，l を用いて次のように表すことができる。

$a=8k+2$，$b=8l+5$

$ab=(8k+2)(8l+5)$

$=64kl+40k+16l+10$

$=8(8kl+5k+2l)+8\cdot1+2$

$=8(8kl+5k+2l+1)+2$ [C]

よって，ab を 8 で割ったときの余りは，

2

[C]　ab を，
$8\times$(整数)$+r$（$0\leqq r<8$）
の形に変形する。

第11講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** **アイ**：36，**ウエ**：12，**オカ**：36，**キク**：12，
ケコ：12

[解説]

$420=192\times2+36$ [A]

$192=\mathbf{36}\times5+\mathbf{12}$

$\mathbf{36}=\mathbf{12}\times3+0$

よって，420 と 192 の最大公約数は，**12** である。

[A]　2 つの自然数 a，b $(a>b)$ について
① a を b で割ったときの余りを r とする。
② $r>0$ のとき　a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。
$r=0$ のとき　b が a と b の最大公約数である。

2 **[正解]** **サシ**：25，**ス**：8，**セソ**：25，**タ**：8，**チ**：1，
ツ：1

[解説]

$1041=508\times2+25$ [B]

$508=\mathbf{25}\times20+\mathbf{8}$

$25=\mathbf{8}\times3+\mathbf{1}$

$8=1\times8+0$ [C]

よって，1041 と 508 の最大公約数は，**1** である。

[B]　2 つの自然数 a，b $(a>b)$ について
① a を b で割ったときの余りを r とする。
② $r>0$ のとき　a を b に，b を r におきかえて，①に戻る。
$r=0$ のとき　b が a と b の最大公約数である。

[C]　この場合，1041 と 508 は互いに素であることがわかる。

第11講 PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イ：2

[解説]

$2x-7y=0$ より，

$$2x=7y \quad \cdots\cdots①$$

2と7は互いに素であるから，x は7の倍数である。

よって，$x=7k$（k は整数）[A]

と表される。このとき，①より，

$$2\cdot 7k=7y$$

$$y=2k$$

以上より，求める整数解は，

$$\boldsymbol{x=7k,\ y=2k}\ (k\text{ は整数})$$

[A]　k を整数とする。
a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

2

[正解] ウ：1，エ：5，オ：3，カ：1

[解説]

$$3x-5y=1 \quad \cdots\cdots①$$

$x=2$ のとき，$6-5y=1$　　$y=1$ [B]

よって，$x=2$，$y=1$ は①の整数解の1つであり，

$$3\cdot 2-5\cdot 1=1 \quad \cdots\cdots②$$

と表される。①－②より，

$$3(x-2)-5(y-1)=0$$

$$3(x-2)=5(y-1) \quad \cdots\cdots③$$

3と5は互いに素であるから，$x-2$ は5の倍数である。

よって，$x-2=5k$（k は整数）[C]

と表される。このとき，③より，

$$3\cdot 5k=5(y-1)$$

$$y-1=3k$$

$$y=3k+1$$

したがって，求める整数解は，

$$\boldsymbol{x=5k+2,\ y=3k+1}\ (k\text{ は整数})$$

[B]　方程式を満たす1組の解（特殊解）を見つける。
その解を方程式に代入した式と，方程式との差をとる。

$$\begin{array}{rl} & 3x-\quad 5y=1 \\ -) & 3\cdot 2-\quad 5\cdot 1=1 \\ \hline & 3(x-2)-5(y-1)=0 \end{array}$$

[C]　k を整数とする。
a，b が互いに素で，ak が b の倍数のとき，k は b の倍数である。

第11講　PART3 確認問題 解答

1 [正解] ア：5，イウ：17

[解説]

58 と 17 に互除法を用いると，[A]

$58=17\times3+7$ ……①

$17=7\times2+3$ ……②

$7=3\times2+1$ ……③

③より，$1=7-3\times2$ ……③′

②より，$3=17-7\times2$ ……②′

①より，$7=58-17\times3$ ……①′

③′ に②′ を代入して整理し，さらに①′ を代入して整理すると，

$1=7-3\times2$

$=7-(17-7\times2)\times2$

$=7\times5-17\times2$ [B]

$=(58-17\times3)\times5-17\times2$

$=58\times5-17\times17$ [C]

よって，$58\times5-17\times17=1$

すなわち，方程式 $58x-17y=1$ の整数解の 1 つは，

$\boldsymbol{x=5,\ y=17}$

[A]　1 次不定方程式 $ax+by=1$ の整数解の 1 つ（特殊解）が見つからないときは，a と b に互除法を用いる方法がある。

[B]　$7\times\square-17\times\square$ の形に変形する。

[C]　$58\times\square-17\times\square$ の形に変形する。

第11講　PART4 確認問題 解答

1

[正解] アイ：45

[解説]

$101101_{(2)} = 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1$ [A]

$= 32 + 8 + 4 + 1 = \mathbf{45}$

[A]　2進法→10進法について，
（位の数字）×（位を表す数）
の形をつくり，その和を求める。

2

[正解] ウ：③

[解説]

90を2で次々と割って，余りを求めていく。[B]

```
2)90
2)45  …0  ↑
2)22  …1  │
2)11  …0  │
2) 5  …1  │
2) 2  …1  │
2) 1  …0  │
   0  …1  │
```

よって，90を2進法で表すと，

$\mathbf{1011010_{(2)}}$

[B]　10進法→2進法
①　10進法で表された数を2で割り，商と余りを求める。
②　①の商を2で割り，その商と余りを求める。そして，商が0になるまで，これを繰り返す。
③　②で出てきた余りを逆順に並べ，最後に①の余りを並べる。

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。